MANUALIA

Srećko Kovač

SVOJSTVA KLASIČNE LOGIKE

SVEUČILIŠTE U ZAGREBU
HRVATSKI STUDIJI

Srećko Kovač

SVOJSTVA KLASIČNE LOGIKE

MANUALIA (mrežno izdanje)
Sv. 10

Nakladnik:
Hrvatski studiji Sveučilišta u Zagrebu
Borongajska cesta 83d, Zagreb

Za nakladnika:
Prof. dr. sc. Josip Talanga

Izvršni urednik:
Branko Ivanda

Priprema:
Srećko Kovač

Recenzenti:
Doc. dr. sc. Marijan Palmović
Prof. dr. sc. Majda Trobok

ISBN 978-953-7823-34-4

Temeljem odluke Povjerenstva za izdavačku djelatnost Hrvatskih studija objavljivanje skriptā odobrilo je Znanstveno-nastavno vijeće Hrvatskih studija 15. siječnja 2013. U skladu s člankom 22. Pravilnika o izdavačkoj djelatnosti Hrvatskih studija pribavljene su dvije pozitivne recenzije.

Srećko Kovač

SVOJSTVA KLASIČNE LOGIKE

Skripta

HRVATSKI STUDIJI SVEUČILIŠTA U ZAGREBU

Zagreb, 2013.

SADRŽAJ

Predgovor

Ova su skripta proizašla iz drugoga dijela nastavnoga teksta *Uvod u logiku* [8], koji je za potrebe sveučilišne nastave logike sastavljen 2001. godine, znatno izmijenjen 2007. godine, te je posebno dorađen za ovu priliku. Riječ je o dijelu koji se bavi metateorijom klasične iskazne logike i logike prvoga reda, mogućnostima i posljedicama uključivanja metateorije u predmetnu logiku, kao i osnovnim značajkama logike višega reda.

Namjena je ovih skripta poslužiti kao podloga za nastavu u logičkome kolegiju srednje ili više razine na sveučilišnome studiju filozofije, kao i na drugim studijima koji u sklopu nastavnoga programa predviđaju logiku. Taj se kolegij nadograđuje na uvodni kolegij o osnovama klasične iskazne logike i logike prvoga reda. Osnovni pojmovi i spoznaje koji se pretpostavljaju u tekstu, osobito oni na koje se u njem izričito upućuje, sažeto su prikazani u trećem, dodatnome dijelu (a znatno opširnije u *Uvodu u logiku*, kao i u [9], gdje se gradivo izlaže u uskoj povezanosti s rješavanjem zadataka). Izloženo se gradivo može obraditi u jednosemestralnome kolegiju s 2–4 sata nastave tjedno.

Zahvalnost na korisnim primjedbama, prijedlozima i ispravcima dugujem recenzentima, te Dragani Sekulić, Slavenki Tokić i Berislavu Žarniću. Zahvalan sam i svim studentima koji su niz proteklih godina svojim komentarima i ispravcima pomogli u postupnoj doradi nastavnoga teksta za ovaj kolegij.

Srećko Kovač
Zagreb, 10. lipnja 2013.

Poglavlje 1

UVOD

Logika kao disciplina ima kao svoj središnji predmet zaključivanje na rečenicama određenoga jezika. Vidjet ćemo da formalna teorija i postupci zaključivanja stoje u logici u najužoj svezi s teorijom istine i s teorijom predmetā i njihovih svojstava i odnosa. Zaključivanje ima dvije strane. Sa **značenjske** (semantičke) strane, nikada iz istinitih premisa valjanim zaključivanjem ne dobivamo neistinit zaglavak, tj. pođemo li od istinitih premisa, ako smo valjano zaključivali, zaglavak će također biti istinit, tj. bit će *posljedica* premisa. S **formalne** (sintaktičke) strane, valjanost se zaključka sastoji u ispravnosti primijenjenih oblika zaključivanja (pravila): polazeći od premisa, primjenom ispravnih oblika zaključivanja *dokazat* ćemo na valjan način zaglavak.

Kao i zaključivanje, tako semantičku i sintaktičku stranu ima i jezik na rečenicama kojega se odvija zaključivanje. On, s jedne strane, sadrži određene **izraze**, a s druge strane, i **vrjednovanje** kojime se izrazima određena oblika pridružuje neko značenje (kao njihova vrijednost). Odgovarajući tomu, i opis logičkoga jezika ima dvije strane. Sintaktički se opis jezika sastoji od *rječnika* (popis osnovnih simbola) i *gramatike* (pravila za tvorbu jezičnih oblika=formula); semantički opis pak definira *tumačenje* i *modele* kojima određujemo značenja simbola i formula.

Na određen način definirano zaključivanje, i pripadni jezik na kojem se odvija zaključivanje, čine jednu logiku, koja je, uz druge slične ili različite logike, predmet koji proučava logika kao znanstvena disciplina. U skladu s gore rečenim, svaka logika (kao predmet), sa svojim jezikom i zaključivanjem, ima sintaktičku i semantičku stranu, što se dade prijegledno prikazati sljedećom tablicom:

LOGIKA	**Sintaksa**	**Semantika**
Jezik, $\mathscr{L}$	rječnik, gramatika	model, tumačenje
Zaključivanje	$\Gamma \vdash p$ dokažljivost	$\Gamma \models p$ posljedični odnos

Pritom

- $\mathscr{L}$ (obično s nekim pokazateljem, npr. $\mathscr{L}_i$) ime je nekoga formaliziranoga jezika,
- $\Gamma \models p$ čitamo: iz skupa iskaza Γ (semantički) slijedi iskaz p,
- $\Gamma \vdash p$ čitamo: iz skupa iskaza Γ dokažljiv je iskaz p.

Opisujući neku logiku i proučavajući njezina svojstva, razvijamo određenu teoriju o toj logici, tj. **metateoriju** te logike, i služimo se metateorijskim jezikom, **metajezikom**, kojim govorimo o toj predmetnoj logici i njezinu (formalnome) jeziku.

U ovome kolegiju naglasak neće biti na samome definiranju predmetne logike, njezina jezika i sustava zaključivanja (što je, zajedno s uvježbavanjem logičkih tehnika i metoda, težište uvodnoga kolegija iz logike, v. ovdje treći dio), nego na proučavanju daljnjih sintaktičkih i semantičkih svojstava tako definirane predmetne logike i jezika, a osobito na međuodnosu (odgovaranja i neodgovaranja) sintaktičke i semantičke strane logike, i na samome međuodnosu predmetne logike i njezine metateorije. Jedno je od glavnih pitanja, primjerice, ono o *potpunosti* deduktivnoga sustava (koji je sintaktičan): može li se svaka semantička posljedica predmetne logike dokazati u deduktivnome sustavu to logike?

Naš će predmet biti isključivo **klasične** logike. Pritom mislimo na niz obilježja koja se uobičajeno podrazumijevaju kad je riječ o klasičnim logikama. To su dvovrijednosne logike u kojima vrijede zakoni protuslovlja i isključenoga srednjega, poveznici imaju istinitosno-funkcionalnu semantiku s De Morganovim zakonima, predmetno je područje neprazno, a posljedice u zaključivanju ostaju očuvane pri dodavanju premisa (monotonost). Logika koju ćemo u *prvome* dijelu proučavati, jest klasična iskazna logika i klasična logika prvoga reda, s kojima se upoznajemo i koje uvježbavamo u uvodnome kolegiju iz discipline Logike. Tomu ćemo, u *drugome* dijelu, pridodati i (a) poseban oblik primijenjene logike prvoga reda, koja sama sadrži vlastitu sintaktičku metateoriju, kao i (b) klasičnu logiku višega reda. *Treći* dio jest dodatak koji služi kao popratan tekst, prije svega, prvomu dijelu, osobito u svrhu pronalaženja referencija koje se odnose na iskaznu logiku i (opću) logiku prvoga reda.

Dio I

SVOJSTVA ISKAZNE LOGIKE I LOGIKE PRVOGA REDA

Poglavlje 2

SVOJSTVA LOGIČKOGA JEZIKA

U razmatranjima o klasičnoj iskaznoj logici i logici prvoga reda zanimljivo je pitanje je li logički jezik kojim se služimo ($\mathscr{L}_i$, $\mathscr{L}_p$, v. ovdje, treći dio), s peterim poveznicima ($\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$) i dvama količiteljnim simbolima ($\forall$, $\exists$) jedini mogući, ako je i on dostatan, ili se može svesti na jezik s manje simbola i oblika. Primjerice, jesu li logički djelatelji međusobno svedljivi? S tim je pitanjem povezano i pitanje ima li nekih općih oblika formula na koje se mogu svesti sve formule elementarne logike.

2.1 Izražajnost poveznikā i svođenje jezika $\mathscr{L}_i$

Svakomu iskazu jezika $\mathscr{L}_i$ odgovara istinitosna funkcija koja uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti jednostavnih podiskaza (lijeva strana istinitosne tablice) pridružuje istinitosnu vrijednost cijeloga iskaza (glavni stupac na desnoj strani istinitosne tablice) (v. definiciju 8.8 u Dijelu III). No odgovara li i svakoj istinitosnoj funkciji neki iskaz jezika $\mathscr{L}_i$? Drugim riječima, može li se jezikom $\mathscr{L}_i$ izraziti svaka istinitosna funkcija? Kako se način pridruživanja istinitosne vrijednosti (iskaza) uređenomu skupu istinitosnih vrijednosti (neposrednih podiskaza) izražuje poveznikom, naše se pitanje pretvara u pitanje "je li skup poveznika $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ **izražajno potpun**?".

Prije nego odgovorimo na gornja pitanja potrebno je podrobnije razjasniti pojam istinitosne funkcije.

2.1.1 Istinitosne funkcije

Učvrstimo i precizirajmo pojam istinitosne funkcije.[1] Što je to istinitosna (iliti Booleova) funkcija? To je funkcija kojoj su **argumenti** istinitosne vrijednosti, a **vrijednost** funkcije je također istinitosna vrijednost. Pritom argumenti čine uređenu n-torku.[2]

Npr. konjunkciji odgovara istinitosna funkcija s dvama argumentima koja uređenomu paru argumenata $\langle \mathbf{i}, \mathbf{i} \rangle$ pridružuje vrijednost **i**, a svim ostalim parovima pridružuje **n**. Pogodbi odgovora istinitosna funkcija s dvama argumentima koja uređenomu paru $\langle \mathbf{i}, \mathbf{n} \rangle$ pridružuje vrijednost **n**, a svim ostalim parovima vrijednost **i**. Općenito:

Definicija 2.1 (Istinitosna funkcija) *Istinitosna funkcija s n argumenata jest pridruživanje istinitosne vrijednosti svakoj uređenoj n-torci istinitosnih vrijednosti.*

(Ili, drugim riječima, istinitosna funkcija s n argumenata jest preslikavanje sa skupa uređenih n-toraka istinitosnih vrijednosti u skup istinitosnih vrijednosti.)

Istinitosne funkcije možemo prijegledno prikazivati **tablicom**, osobito funkcije s jednim ili dvama argumentima. Istinitosnih funkcija s **jednim** argumentom ima četiri, i prikazane su četirima stupcima desno od vertikalne crte u sljedećoj istinitosnoj tablici:

i	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**i**	**n**	**i**	**n**

Istinitosne funkcije s **dvama** argumentima prikazujemo tablicom s četirima redcima (svaki za jedan uređen par istinitosnih vrijednosti). Tih funkcija ima ukupno $2^4 = 16$:

i	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**	**n**
i	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**	**i**	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**n**	**n**
n	**i**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**	**i**	**n**

Možemo uočiti da su sve istinitosne funkcije s jednim argumentom sadržane među istinitosnim funkcijama s dvama argumentima.

[1]Općenito, *funkcija* (preslikavanje) sa skupa A u skup B jest pridruživanje svakomu članu skupa A jednoga člana skupa B.

[2]Neformalno kažemo da je uređena n-torka uređen n-člani skup u kojem je bitan poredak članova. Ako se skup S i S' sastoje od istih članova, ali je u njima poredak članova različit, S i S' različiti su uređeni skupovi.

Općenito, broj istinitosnih funkcija s n ***argumenata*** izračunavamo na sljedeći način. Najprije izračunamo broj uređenih n-članih skupova argumenata - to je (kako znamo) 2^n (broj redaka u tablici). Zatim izračunamo broj istinitosnih funkcija za n argumenata - to je 2^{2^n} (broj mogućih stupaca u desnome dijelu tablice). Npr. istinitosnih funkcija s trima argumentima ima $2^{2^3} = 2^8 = 256$.

Kako broj argumenata raste u beskonačnost, i istinitosnih funkcija ima beskonačno mnogo.

2.1.2 Izražajno potpun skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$

Niz disjunktivno povezanih formula od kojih je svaka niz konjunktivno povezanih slovnih formula, nazivljemo **disjunktivnim normalnim oblikom** (DNO). Disjunktivni normalni oblik (DNO) kojega svaki disjunkt sadrži, za *svako* zadano iskazno slovo, bilo sámo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova, nazivljemo **potpunim disjunktivnim normalnim oblikom** (PDNO).

Nadalje, kažemo da je skup poveznika **izražajno potpun** u iskaznoj logici ako i samo ako se svaka istinitosna funkcija može u jeziku $\mathscr{L}_i$ izraziti iskazom koji sadrži samo te poveznike.

Tvrdimo da vrijedi sljedeći metateorijski poučak (metapoučak):

Poučak 2.1 *Skup* $\{\neg, \wedge, \vee\}$ *jest izražajno potpun.*

Dokaz Evo kako taj poučak možemo dokazati.

Pogledajmo najprije primjer tablice:

P	Q	
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Prema prvome retku tablice, iskaz koji izražuje tablicom prikazanu istinitosnu funkciju, jest istinit ako je istinito i P i Q, dakle ako je istinito $P \wedge Q$. Također, prema drugome retku, istinit je ako je P istinito, a Q neistinito, tj. ako je istinito $P \wedge \neg Q$. Istinit je također, prema četvrtome retku, ako su i P i Q neistiniti, tj. ako je $\neg P \wedge \neg Q$ istinito. Nema drugih tumačenja za koja je iskaz koji izražuje tablicom prikazanu istinitosnu funkciju, istinit. On je stoga istinit ako i samo ako je istinito bilo $P \wedge Q$, bilo $P \wedge \neg Q$, bilo $\neg P \wedge \neg Q$, tj. akko je istinito

$$((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Dobiveni iskaz ima sljedeću istinitosnu tablicu:

P	Q	$((P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q)) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$
i	**i**	**i**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Glavni redak u desnome dijelu tablice odgovara vrijednostima zadane istinitosne funkcije. Gornji iskaz neformalno, zbog bolje prijeglednosti, možemo pisati i kao višečlanu disjunkciju:

$$(P \wedge Q) \vee (P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q).$$

Općenito, istinitosnu funkciju prikazanu istinitosnom tablicom možemo izraziti nizom disjunktivno povezanih formula od kojih je svaka niz konjunktivno povezanih slovnih formula, tj. formulom u disjunktivnome normalnome obliku. Pritom se svaki redak tablice u kojem je funkcijska vrijednost **i**, opisuje nizom konjunkata koje čine svako iskazno slovo koje je u tom retku istinito, i nijek svakoga iskaznoga slova koje je u tom retku neistinito.

Iskaz koji smo malo prije dobili opisujući zadanu istinitosnu tablicu, jest u PDNO jer svaki disjunkt za svako zadano iskazno slovo sadrži konjunkt koji je bilo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova.

Ako se u istinitosnoj tablici samo jednom javlja **i** kao vrijednost funkcije, dobivamo jednočlani disjunktivni niz, koji je niz (makar i jednočlan) konjunktivno povezanih formula. Stoga i takav oblik, bilo to, primjerice, tek P, možemo smatrati potpunim disjunktivnim normalnim oblikom.

Ako pak ni u jednom retku vrijednost istinitosne funkcije nije **i**, istinitosnu funkciju možemo izraziti konjunkcijom svih iskaznih slova koja se javljaju u tablici, s njihovim nijekovima. Npr.

$$(P \wedge \neg P) \wedge (Q \wedge \neg Q) \wedge (R \wedge \neg R) \wedge \ldots$$

I takav je iskaz u PDNO jer ga možemo smatrati jednim disjunktom koji je niz slovnih konjunkata za svako zadano piročno slovo.

Dakle svaka se istinitosna funkcija dade izraziti iskazom u potpunome disjunktivnome normalnome obliku. Prema tome je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun. ⊣

Da bismo izrazili bilo koju istinitosnu funkciju, umjesto PDNO možemo uporabiti i **potpun konjunktivni normalni oblik** (PKNO). Taj oblik dobivamo kad istinitosnu tablicu opisujemo niječući svako tumačenje za koje je funkcijska vrijednost neistina. Evo primjera:

P	Q	
i	**i**	**n**
i	**n**	**i**
n	**i**	**n**
n	**n**	**i**

Treba zanijekati prvi i treći redak, a to činimo tako da 1) zaniječemo P ili Q i 2) potvrdimo P ili zaniječemo Q. Time dobivamo sljedeću konjunkciju disjunkcija:

$$(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$$

Općenito, tumačenje u kojem je funkcijska vrijednost neistina, niječemo disjunktivnim nizom u kojem disjunkte čine nijek svakoga iskaznoga slova koje je u tom tumačenju istinito, i svako iskazno slovo koje je u tom tumačenju neistinito.

Konjunktivni niz formula od kojih je svaka disjunktivni niz slovnih formula, nazivljemo **konjunktivnim normalnim oblikom** (**KNO**). KNO kojega svaki konjunkt sadrži, za *svako* zadano iskazno slovo, bilo smo iskazno slovo bilo nijek iskaznoga slova, jest **potpuni konjunktivni normalni oblik** (**PKNO**). Iskaz $(\neg P \vee \neg Q) \wedge (P \vee \neg Q)$, koji smo dobili opisom naše istinitosne tablice, jest u potpunome konjunktivnome normalnome obliku jer je to dvočlani konjunktivni niz, a svaki konjunkt za svako zadano iskazno slovo sadrži disjunkt koji je bilo iskazno slovo, bilo nijek iskaznoga slova.

Ako ni u jednom retku istinitosne tablice funkcijska vrijednost nije neistina, PKNO će biti

$$(P \vee \neg P) \vee (Q \vee \neg Q) \vee (R \vee \neg R) \vee \ldots$$

Zaključimo da se svaka istinitosna funkcija dade izraziti iskazom u potpunome konjunktivnome normalnome obliku. I ta činjenica također dokazuje da je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun.

2.1.3 Ostali izražajno potpuni skupovi poveznika

Metajezični znak $\simeq$ u nastavku će nam označivati semantičku istovrijednost.

Skup $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Ako je skup $\{\neg, \wedge, \vee\}$ izražajno potpun, izražajno je potpun i njegov nadskup $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$, a to je skup upotrijebljen u jeziku $\mathscr{L}_i$.

Prema tome, sve istinitosne funkcije koje se mogu izraziti pomoću $\rightarrow$ i $\leftrightarrow$, dadu se izraziti i bez njih, na temelju sljedećih semantičkih istovrijednosti (koje lako možemo provjeriti istinitosnom tablicom):

$$p \rightarrow q \simeq \neg p \vee q,$$
$$p \rightarrow q \simeq \neg(p \wedge \neg q),$$
$$p \leftrightarrow q \simeq (p \wedge q) \vee (\neg p \wedge \neg q),$$
$$p \leftrightarrow q \simeq (\neg p \vee q) \wedge (\neg q \vee p).$$

Skupovi $\{\neg, \vee\}$ **i** $\{\neg, \wedge\}$

Nadalje, izražajno su potpuni i skupovi $\{\neg, \vee\}$ i $\{\neg, \wedge\}$. Naime, na temelju De Morganovih zakona uzetih u semantičkome smislu (v. stavak 8.7 u trećem dijelu):

$$\neg(p \wedge q) \simeq \neg p \vee \neg q,$$
$$\neg(p \vee q) \simeq \neg p \wedge \neg q,$$

stoje sljedeće semantičke istovrijednosti:

$$p \wedge q \simeq \neg(\neg p \vee \neg q),$$
$$p \vee q \simeq \neg(\neg p \wedge \neg q),$$

koje iskazuju da disjunkciju možemo izraziti pomoću nijeka i konjunkcije, a konjunciju pomoću nijeka i disjunkcije.

Skup $\{\neg, \rightarrow\}$

Također je izražajno potpun i skup $\{\neg, \rightarrow\}$ jer se i disjunkcija i konjunkcija mogu izraziti pomoću $\neg$ i $\rightarrow$:

$$p \wedge q \simeq \neg(p \rightarrow \neg q),$$
$$p \vee q \simeq \neg p \rightarrow q.$$

Te istovrijednosti možemo provjeriti istinitosnom tablicom!

Skupovi $\{|\}$ **i** $\{\downarrow\}$

Poveznike možemo, napokon, svesti i na jedan jedini poveznik – bilo na **disjunktivni nijek**, | ("ne *p* ili ne *q*"), bilo na **dvonijek** (binegacija), $\downarrow$ ("ni *p* ni *q*").

Evo njihovih općih tablica:

p	q	$p \mid q$	$p \downarrow q$
i	**i**	**n**	**n**
i	**n**	**i**	**n**
n	**i**	**i**	**n**
n	**n**	**i**	**i**

Primijetimo da se disjunktivni nijek svodi na nijek konjunkcije, a dvonijek na nijek disjunkcije.

Skupovi $\{|\}$ i $\{\downarrow\}$ jesu za iskaznu logiku izražajno potpuni. To možemo dokazati svođenjem nijeka, konjunkcije i disjunkcije kako na disjunktivni nijek, tako i na dvonijek:

$$
\begin{array}{lcl@{\qquad\qquad}lcl}
\neg p & \simeq & p \mid p & \neg p & \simeq & p \downarrow p \\
p \wedge q & \simeq & (p \mid q) \mid (p \mid q) & p \wedge q & \simeq & (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q) \\
p \vee q & \simeq & (p \mid p) \mid (q \mid q) & p \vee q & \simeq & (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q).
\end{array}
$$

Na ideju da se svi poveznici mogu svesti na jedan jedini, došao je C. S. *Peirce* (oko 1880.), ali je članak o tome prvi objavio američki logičar H. M. *Sheffer* 1913. Deduktivni (aksiomatski) sustav za iskaznu logiku samo s poveznikom | postavio je 1917. *J. Nicod*.

2.1.4 Izražajna nepotpunost

Skup $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$

Od petero poveznika našega jezika $\mathscr{L}_i$ ne smijemo izostaviti $\neg$. Tj.

STAVAK 2.1 *Skup* $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ *nije izražajno potpun.*

Razlog je tomu što je svaki iskaz u kojem nema $\neg$, zadovoljiv, tj. bez $\neg$ se ne može izgraditi nezadovoljiv iskaz. Tvrdnju da, kad bismo se ograničili samo na gornji skup poveznika, svi bi iskazi bili zadovoljivi, možemo dokazati posebnim načinom dokazivanja koji se nazivlje **matematičkom indukcijom** i često se rabi u metalogici. Za potrebe toga dokaza razdijelit ćemo iskaze jezika $\mathscr{L}_i$ bez $\neg$ prema duljini. **Duljina iskaza** jest broj pojavaka poveznika u iskazu. Polazimo od iskazā duljine 0 (s 0 pojavaka poveznika, to su iskazna slova), zatim slijede iskazi duljine 1 (s jednim pojavkom poveznika), iza toga iskazi duljine 2 (s dvama pojavcima poveznika) itd. Za potrebe dokaza definirajmo i osnovno tumačenje T_0, koje svakomu iskaznomu slovu pridružuje vrijednost **i**. Tvrdimo:

STAVAK 2.2 *Svi su iskazi bez* $\neg$ *istiniti za osnovno tumačenje* T_0*, koje svakomu iskaznomu slovu pridružuje vrijednost* ***i****.*

Dokaz U dokazu stavka 2.2 služimo se zaključkom pomoću matematičke indukcije, koji polazi od dviju premisa: **osnovice** i **induktivnoga koraka**. Osnovica te matematičke indukcije kaže da je svaki iskaz duljine (0) za T_0 istinit. Induktivni korak je pogodba koja kaže sljedeće: ako je za T_0 istinit svaki iskaz neke po volji izabrane duljine n kao i svaki kraći iskaz, onda je za T_0 istinit i svaki iskaz iduće po redu duljine $n + 1$. Prednjak induktivnoga koraka nazivljemo **induktivnom hipotezom**. Iz tih dviju premisa (koje još treba dokazati) slijedi da je svaki iskaz (bilo koje duljine) istinit za osnovno tumačenje T_0. Prema tome je svaki iskaz zadovoljiv.

Evo sada prijegledno cijeloga zaključka:

1	Svaki iskaz bez $\neg$ duljine 0, jest istinit za T_0.	*osnovica*
2	*Ako* je za T_0 istinit svaki iskaz bez $\neg$ duljine n ili manje, *onda* je za T_0 istinit i svaki iskaz bez $\neg$ duljine n+1.	*ind. korak*
3	Svaki je iskaz bez $\neg$ istinit za tumačenje T_0.	

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).

Dokaz osnovice (premisa 1):

Iskazi bez $\neg$ duljine 0 jesu iskazna slova, a njima svima T_0 pridružuje vrijednost **i**.

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):

Iskaz p bez $\neg$ duljine n+1 može imati četiri oblika: $q \wedge r$, $q \vee r$, $q \rightarrow r$ i $q \leftrightarrow r$. U svim tim slučajima podiskaz q, kao i podiskaz r imaju duljinu n ili manje. Neka o njima vrijedi induktivna hipoteza (prednjak induktivnoga koraka). Prema induktivnoj hipotezi i q i r su za T_0 istiniti. Pogledajmo vrijedi li i posljedak induktivnoga koraka, tj. vrijedi li cijela pogodba (induktivni korak). Ako su i q i r istiniti, istiniti su svi oblici $q \wedge r$, $q \vee r$, $q \rightarrow r$ i $q \leftrightarrow r$ (što se lako može dokazati istinitosnom tablicom). Dakle, istinit je i svaki oblik s n+1 pojavkoma poveznikā. Time je dokazan induktivni korak.

Ako smo dokazali osnovicu i induktivni korak, dokazali smo i zaglavak (3) - da su svi iskazi bez $\neg$ za T_0 istiniti. Jer, prema osnovici su za T_0 istiniti svi iskazi bez $\neg$ duljine 0. Ali, prema induktivnome koraku, tada su za T_0 istiniti i svi iskazi bez $\neg$ duljine 1. Ako su pak za T_0 istiniti svi iskazi bez $\neg$ duljine 1, prema induktivnome su koraku za T_0 istiniti i svi iskazi bez $\neg$ duljine 2, stoga su (opet prema induktivnome koraku) istiniti i svi iskazi bez $\neg$ duljine 3, itd. Dakle, svi iskazi bez $\neg$ koje god duljine n, istiniti su za T_0.

Ako su svi iskazi bez $\neg$ istiniti za osnovno tumačenje T_0, svi su oni zadovoljivi. Dakle se bez $\neg$ ne mogu izraziti nezadovoljivi iskazi, pa je skup $\{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$ izražajno nepotpun, što je i trebalo dokazati. $\dashv$

Skup $\{\neg, \leftrightarrow\}$

Ne možemo izraziti svaku istinitosnu funkciju služeći se samo poveznicima $\neg$ i $\leftrightarrow$.

STAVAK 2.3 *Svaki iskaz u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$, istinit je samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice.*

Dokaz Dokaz se provodi matematičkom indukcijom. Imajmo na umu da je i 0 paran broj (djeljiv je s 2 bez ostatka).

1 Svaki iskaz duljine 0 u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$,
istinit je samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice.

2 *Ako* je svaki iskaz duljine n ili manje u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$,
istinit samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice,
onda je svaki iskaz duljine n+1 u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$,
istinit samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice.

---

3 Svaki je iskaz u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$,
istinit samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice.

Dokaz osnovice (premisa 1): Iskaz duljine 0 jest jednostavan iskaz. Prema načinu gradnje istinitosnih tablica svaki je jednostavan iskaz istinit upravo u polovici redaka istinitosne tablice.

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2): Iskaz p duljine n+1 u kojem je svaki poveznik $\neg$ ili $\leftrightarrow$, može imati oblik $\neg q$ ili $q \leftrightarrow r$.

a) $p = \neg q$. Neka je q (prema induktivnoj hipotezi) istinit samo u parnome broju ili polovici redaka istinitosne tablice. – Ako je q istinito u parnome broju redaka, u preostalim redcima $\neg q$ će biti istinito (prema semantici nijeka), a broj je preostalih redaka paran jer istinitosna tablica uvijek ima paran broj redaka (kad od parnoga broja oduzmemo paran broj, dobivamo paran broj). – Ako je q istinito u polovici broja redaka, u drugoj će polovici redaka $\neg q$ biti istinito.

b) $p = q \leftrightarrow r$. Ako istinitosna tablica za $q \leftrightarrow r$ ima dva redka, $q \leftrightarrow r$ je istinito ili u oba retka ili u jednome retku ili ni u jednome redku, dakle u parnom broju redaka ili u pola redaka. – Neka istinitosna tablica za $q \leftrightarrow r$ ima više od dvaju redaka. Tada je pola redaka tablice uvijek paran broj. Dakle, dovoljno je općenito promatrati samo slučaj kad su i q i r istiniti u parnome broju redaka istinitosne tablice. Ako je q istinito u parnome broju redaka, r je istinito u parnome ili neparnome broju od tih redaka - ako u parnome, onda je r istinito još i u parnome broju (od parnoga broja) redaka kad je q neistinito, dakle dobivamo ukupno parni broj poklapanja te prema tome i parni broj redaka kad je $q \leftrightarrow r$ istinito. Ako je r istinito u neparnome broju redaka u kojima je istinito i q, onda je istinito još u neparnome broju (od parnoga broja) redaka kad je q neistinito. Dakle, ponovno ukupno dobivamo paran broj poklapanja te i paran broj redaka kad je $q \leftrightarrow r$ istinito.

Na temelju dokazanih osnovice i induktivnoga koraka slijedi zaglavak (3) da su svi iskazi u kojima se pojavljuju samo $\neg$ ili $\leftrightarrow$, istiniti uvijek u parnome broju ili u polovici redaka istinitosne tablice. $\dashv$

Iz izražajne nepotpunosti skupa $\{\neg, \leftrightarrow\}$ slijedi, dakako, i izražajna nepotpunost njegova podskupa $\{\neg\}$.

Sažmimo ishod razmatranja o izražajnoj potpunosti povezničkih skupova. Od petero poveznika u jeziku $\mathscr{L}_i$ ne može se izostaviti $\neg$. Samomu povezniku $\neg$ treba pridodati barem $\wedge$ ili $\vee$ ili $\rightarrow$ želimo li da skup poveznika bude izražajno potpun. Ako izostavimo $\neg$, potrebno je uvesti $|$ ili $\downarrow$, kojima pak za izražajnu potpunost nije potreban drugi poveznik.

2.2 Svođenje jezikā $\mathscr{L}_p$ i $\mathscr{L}_{p=}$

2.2.1 Svođenje na jedan količitelj

Služeći se *De Morganovim* zakonima za **količitelje** (kvantifikatore, v. stavak 9.6 u trećem dijelu) u semantičkome smislu:

$$\neg\forall \mathrm{x} p \simeq \exists \mathrm{x} \neg p$$
$$\neg\exists \mathrm{x} p \simeq \forall \mathrm{x} \neg p,$$

opći količitelj možemo u $\mathscr{L}_p$ i $\mathscr{L}_{p=}$ izraziti pomoću nijeka i opstojnoga količitelja, a opstojni količitelj pomoću nijeka i općega količitelja. Stoga u rječniku možemo zadržati samo jedan količiteljni simbol, bilo $\forall$ bilo $\exists$.

2.2.2 Isključivanje predmetnih konstanata i funkcijskih simbola

Iz $\mathscr{L}_p$= možemo isključiti **predmetne konstante** na način kao što isključujemo određene opise. To isključivanje možemo provesti samo kontekstualno, uz izbor odgovarajućega priroka te uz izraz uvjeta opstojnosti i jedinstvenosti. Npr. umjesto

$$Pc$$

možemo pisati:

$$\exists x[\forall y(Cy \leftrightarrow y = x) \land Px].$$

Općenito (izraženo metavarijablama), umjesto predmetne konstante c uvodimo 1-mjesni prirok P^1.

U našem primjeru vrijedi da je Pc istinito u tumačenju prvoga reda $\mathcal{T}$ (modela $\mathfrak{M}$) ako i samo ako je istinito u tumačenju $\mathcal{T}'$ (modela $\mathfrak{M}'$) za koje $\mathcal{T}(P^1) = \mathcal{T}'(P^1)$, a $\mathcal{T}(c) \in \mathcal{T}'(C^1)$. Pc i $\exists x[\forall y(Cy \leftrightarrow y = x) \land Px]$ nisu semantički istovrijedni, nego je riječ o semantičkome odnosu koji možemo općenito opisati ovim stavkom:

STAVAK 2.4

$$\mathfrak{M} \models_v p(\mathrm{c}) \textit{ akko } \mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Cy} \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \land p(\mathrm{x}/\mathrm{c})),$$

pri čem $\mathcal{T}'(\mathrm{C}^1) = \{\mathcal{T}(\mathrm{c})\}$, *a prema obziru na ostale se simbole sadržane u obama iskazima* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *ne razlikuju.*

Dokaz

$\mathfrak{M} \models_v p(\mathrm{c})$ akko $\mathcal{T}(\mathrm{c})$ zadovoljava $p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$, tj. točnije, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathcal{T}(\mathrm{c})/\mathrm{x}]} p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$,
$\mathcal{T}(\mathrm{c})$ zadovoljava $p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$ akko $\mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Cy} \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \land p(\mathrm{x}/\mathrm{c}))$,
jer $\mathcal{T}'(\mathrm{C}^1) = \{\mathcal{T}(\mathrm{c})\}$. $\dashv$

Na sličan način možemo isključiti i funkcijske simbole. Naime, umjesto

$$Pf(x, y)$$

možemo pisati:

$$\exists z(\forall w(Fzxy \leftrightarrow w = z) \land Pz).$$

Općenito, umjesto n-mjesnoga funkcijskoga simbola f^n uvodimo n+1-mjesni prirok F^{n+1}.

Kako predmetnu konstantu možemo shvatiti kao 0-mjesni funkcijski simbol, da bismo općenito dokazali da se iz $\mathscr{L}_p$ mogu isključiti predmetne konstante i funkcijski simboli, potrebno je dokazati sljedeći stavak:

STAVAK 2.5

$$\mathfrak{M} \models_v p[\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n)] \textit{ akko } \mathfrak{M}' \models_v \exists \mathrm{x}(\forall \mathrm{y}(\mathrm{Fyt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \leftrightarrow \mathrm{y} = \mathrm{x}) \land p(\mathrm{x}/\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n))),$$

pri čem $\langle \mathrm{d}, [\![\mathrm{t}_1]\!]^{\mathfrak{M}}_v, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]^{\mathfrak{M}}_v \rangle \in \mathcal{T}'(\mathrm{F}^{1+n})$ *i uvijek* $\mathrm{d} = [\![\mathrm{f}(\mathrm{t}_1 \ldots \mathrm{t}_n)]\!]^{\mathfrak{M}}_v$*, a prema obziru na ostale se simbole sadržane u oba iskaza* $\mathfrak{M}$ *i* $\mathfrak{M}'$ *ne razlikuju.*

Dokaz Sličan dokazu za isključenje konstanata (kao 0-mjesnih funkcijskih simbola). $\dashv$

2.2.3 Svedeni jezik

U potpuno svedenom obliku jezika logike prvoga reda (s '=') ostaju sljedeći simboli:

1. priroci,
2. predmetne varijable,
3. $|$ ili $\downarrow$,
4. $\forall$ ili $\exists$, i
5. razgodci (interpunkcija).

2.3 Zakoni dvojnosti

De Morganovi zakoni za poveznike i količitelje, pomoću kojih se međusobno definiraju $\land$ i $\lor$, kao i $\forall$ i $\exists$, samo su posebni slučaji zakonā dvojnosti, o kojima će upravo biti riječ.

2.3.1 Zakon niječne dvojnosti za iskaznu logiku

DEFINICIJA 2.2 (DVOJINA) *Dvojina* p' *iskaza* p*, u kojem su svi poveznici* $\neg$, $\land$ *ili* $\lor$*, jednaka je iskazu* p*, osim što je* $\land$ *zamijenjen s* $\lor$*, a* $\lor$ *s* $\land$*.*

DEFINICIJA 2.3 (NIJEČNA DVOJINA) *Niječna dvojina* $p^* = p'(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$*, gdje su* $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ *sva iskazna slova koja se javljaju u* p'*.*

Tj. niječna je dvojina je jednaka dvojini, osim što je pred svako iskazno slovo predmetnuto $\neg$. (Razlikujmo *niječnu dvojinu* od običnoga *nijeka dvojine*.)

STAVAK 2.6 (ZAKON NIJEČNE DVOJNOSTI ZA ISKAZNU LOGIKU) *Za svaki iskaz p u kojem je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno niječnoj dvojini p^* (tj. $\neg p \simeq p^*$).*

Dokaz U dokazu se služimo matematičkom indukcijom.

1 Za svaki iskaz p duljine 0 u kojem je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.
2 *Ako* za svaki iskaz p duljine n ili manje u kojem je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^* (IND. HIP.),
onda i za svaki iskaz p duljine $n+1$ u kojem je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

---

3 Za svaki iskaz p u kojem je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).

Dokaz osnovice (premisa 1):

p je jednostavan iskaz, p^* je $\neg p$, pa su prema tome $\neg p$ i p^* semantički istovrijedni.

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):

Iskaz p duljine $n+1$ može imati oblik $\neg q$, $q \wedge r$ ili $q \vee r$. Prema induktivnoj hipotezi $\neg q$ i $\neg r$ semantički su istovrijedni s q^*, odnosno, s r^* (jer q, kao i r, imaju svaki duljinu n ili manje).

1. p ima oblik $\neg q$. Sljedeća tablica pokazuje da su $\neg\neg q$ i $(\neg q)^* = \neg q^*$ semantički istovrijedni ako vrijedi induktivna hipteza:

q	$\neg\neg q$	$\neg q^*$
i	**i**	**i n**
n	**n**	**n i**

2. p ima oblik $q \wedge r$. Tablica pokazuje da su $\neg(q \wedge r)$ i $(q \wedge r)^* = q^* \vee r^*$ semantički istovrijedni ako vrijedi induktivna hipoteza:

q	r	$\neg(q \wedge r)$	$q^* \vee r^*$
i	**i**	**n i**	**n n n**
i	**n**	**i n**	**n i i**
n	**i**	**i n**	**i i n**
n	**n**	**i n**	**i i i**

3. p ima oblik $q \vee r$. Iz sljedeće tablice vidimo da su $\neg(q \vee r)$ i $(q \vee r)^* = q^* \wedge r^*$ semantički istovrijedni ako stoji induktivna hipoteza:

q	r	$\neg(q \vee r)$		$q^* \wedge r^*$		
i	**i**	**n**	**i**	**n**	**n**	**n**
i	**n**	**n**	**i**	**n**	**n**	**i**
n	**i**	**n**	**i**	**i**	**n**	**n**
n	**n**	**i**	**n**	**i**	**i**	**i**

Time je dokazan induktivni korak, a on zajedno s osnovicom povlači zaglavak da su za svaki iskaz p u kojem je svaki poveznik $\neg, \wedge$ i $\vee$, $\neg p$ i p^* semantički istovrijedni. $\dashv$

2.3.2 Zakon dvojnosti za iskaznu logiku

Sada možemo dokazati i sljedeći stavak:

STAVAK 2.7 *Dvojina p' iskaza p semantički je istovrijedna s $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ sva iskazna slova koja se javljaju u p.*

Dokaz Neka su u p svi poveznici $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$.

Svaki je iskaz p dvojina nekoga iskaza q,
jer uvijek ima iskaz q koji je dvojina od p, a dvojina dvojine od p jest p,
nadalje, $q \simeq \neg q^*$, jer $\neg q \simeq q^*$, prema niječnome zakonu o dvojnosti,
dakle $p' \simeq \neg q^*$, jer $p' = q$,
također, $q^* = p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, jer $q' = p$.
Prema tome $p' \simeq \neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$. $\dashv$

Sada dolazimo do samoga zakona dvojnosti:

STAVAK 2.8 (ZAKON DVOJNOSTI ZA ISKAZNU LOGIKU) *Ako su iskazi p i q u kojima je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, semantički istovrijedni, semantički su istovrijedne i njihove dvojine p' i q' (tj. ako $p \simeq q$, onda $p' \simeq q'$).*

Dokaz Rabimo znak $\simeq$ kao izraz za semantičku istovrijednost.

Neka $p \simeq q$,
dakle $\neg p \simeq \neg q$,
dakle $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n) \simeq \neg q(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$
(jer $\simeq$ ne ovisi o promjeni istinitosne vrijednosti iskaznih slova),
prema tome, $p' \simeq q'$ (prema stavku 2.7). $\dashv$

2.3.3 Zakon niječne dvojnosti za logiku prvoga reda

Umjesto pojma iskaza iskazne logike uvodimo pojam formule logike prvoga reda, a umjesto pojma istinitosti pojam zadovoljenosti. Na odgovarajući način poopćavamo pojam dvojine: dvojina formule p u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, jest formula p', koju dobivamo tako da se u p međusobno zamijene $\wedge$ i $\vee$, te $\forall$ i $\exists$. Niječna dvojina $p^* = p'(\neg\mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg\mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n$ sva piročna slova u p, tj. niječna dvojina od p jest dvojina od p u kojoj je pred svako priročno slovo predmetnuto $\neg$. U dokazu rabimo i pojam **duljine formule** i definiramo ga brojem pojavaka djelateljā u formuli.

Stavak 2.9 (Zakon niječne dvojnosti za logiku prvoga reda) *Za svaku formulu p u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s niječnom dvojinom p^* (tj. $\neg p \simeq p^*$).*

Dokaz Dokaz je sljedeća matematička indukcija.

1 Za svaku formulu p duljine 0 u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.
2 *Ako* za svaku formulu p duljine n ili manje u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^* (ind. hip.), *onda* i za svaku formulu p duljine n+1 u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

---

3 Za svaku formulu p u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, vrijedi da je $\neg p$ semantički istovrijedno s p^*.

Sada slijede dokazi premisa (osnovice i induktivnoga koraka).

Dokaz osnovice (premisa 1):

p je jednostavna formula, pa je $p^* = \neg p$. Prema tome vrijedi $\neg p \simeq p^*$.

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):

Formula p duljine n+1 može imati oblik $\neg q$, $q \wedge r$, $q \vee r$, $\forall \mathrm{x} q$ i $\exists \mathrm{x} q$. Prema induktivnoj hipotezi $\neg q$ i $\neg r$ semantički su istovrijedni s q^*, odnosno, s r^* (jer je q, kao i r, duljine n ili manje). Slučaji 1.-3. analogni su odgovarajućim slučajima u dokazu za iskaznu logiku. Preostaje dokazati slučaje 4. i 5.

4. p ima oblik $\forall \mathrm{x} q$.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall \mathrm{x} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \not\models_v \forall \mathrm{x} q$,
> dakle barem za jedan $\mathrm{d} \in \mathrm{D}(\in \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$,
> dakle $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} q^* = (\forall \mathrm{x} q)^*$.

I *obratno*.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} q^* = (\forall \mathrm{x} q)^*$,
> dakle barem za jedan $\mathrm{d} \in \mathrm{D}(\in \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$,
> dakle $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle $\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \not\models_v \forall \mathrm{x} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \models_v \neg\forall \mathrm{x} q$.

Prema tome su $\neg\forall \mathrm{x} q$ i $(\forall \mathrm{x} q)^* = \exists \mathrm{x} q^*$ semantički istovrijedni.
5. p ima oblik $\exists \mathrm{x} q$.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \neg\exists \mathrm{x} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \not\models_v \exists \mathrm{x} q$,
> dakle za svaki $\mathrm{d} \in \mathrm{D}(\in \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$,
> dakle za svaki $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} \neg q$,
> dakle za svaki $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} q^* = (\exists \mathrm{x} q)^*$.

I *obratno*.

> Neka $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} q^* = (\exists \mathrm{x} q)^*$,
> dakle za svaki $\mathrm{d} \in \mathrm{D}(\in \mathfrak{M}), \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q^*$,
> dakle za svaki $\mathrm{d}\mathfrak{M} \not\models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} q$, prema induktivnoj hipotezi,
> dakle $\mathfrak{M} \not\models_v \exists \mathrm{x} q$,
> dakle $\mathfrak{M} \models_v \neg\exists \mathrm{x} q$.

Prema tome su $\neg\exists \mathrm{x} q$ i $(\exists \mathrm{x} q)^* = \forall \mathrm{x} q^*$ semantički istovrijedni.
Slijedi zaglavak matematičke indukcije da su za svaku formulu p u kojoj je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, $\neg p$ i p^*, semantički istovrijedni. $\dashv$

2.3.4 Zakon dvojnosti za logiku prvoga reda

Za logiku prvoga reda vrijedi i stavak:

STAVAK 2.10 *Dvojina p' semantički je istovrijedna s $\neg p(\neg \mathrm{P}_1/\mathrm{P}_1, \ldots, \neg \mathrm{P}_n/\mathrm{P}_n)$, gdje su $P_1, \ldots, P_n$ sva priročna slova u p.*

Dokaz Dokaz je poopćen i analogan dokazu za iskaznu logiku. $\dashv$

Za logiku prvoga reda vrijedi i poopćeni zakon dvojnosti:

STAVAK 2.11 (ZAKON DVOJNOSTI ZA LOGIKU PRVOGA REDA) *Ako su formule p i q, u kojima je svaki poveznik $\neg$, $\wedge$ ili $\vee$, semantički istovrijedne, istovrijedne su i njihove dvojine p' i q' (tj. ako $p \simeq q$, onda $p' \simeq q'$)*

Dokaz Dokaz se dobiva poopćenjem u analogiji s dokazom za iskaznu logiku. $\dashv$

2.4 Zadatci

1. Nacrtajte istinitosnu tablicu sa svim istinitosnim funkcijama s jednim argumentom i istinitosnu tablicu sa svim istinitosnim funkcijama s dvama argumentima! Izrazite svaku istinitosnu funkciju iz dviju tablica jezikom $\mathcal{L}_i$!

2. Izrazite istinitosnu funkciju koja u tabličnome prikazu ima u trećem, četvrtome i sedmome retku vrijednost **i**, iskazom u potpunome disjunktivnome normalnome obliku!

3. Izrazite istinitosnu funkciju koja u tabličnome prikazu ima u drugome, trećem i šestome retku vrijednost **n**, iskazom u potpunome konjunktivnome normalnome obliku!

4. Iskaze

$$\begin{array}{l} \neg P \to \neg Q, \\ P \to \neg(Q \to R), \\ (\neg Q \leftrightarrow R) \to P \end{array}$$

   izrazite svaki četirima istovrijednima iskazima služeći se skupovima poveznika $\{\neg, \wedge\}$, $\{\neg, \vee\}$, $\{|\}$ i $\{\downarrow\}$!

5. Iskaze

$$\neg P \land \neg Q,$$
$$P \lor (\neg P \land Q),$$
$$\neg(P \leftrightarrow (Q \to R))$$

izrazite svaki jednim istovrijednim iskazom služeći se samo skupom poveznika $\{\neg, \to\}$!

6. Iskaz

$$\forall x \neg \exists y (Pxy \to (\neg Pxc \leftrightarrow \exists z Qyz))$$

izrazite dvama istovrijednim iskazima služeći se, jednom, skupom djelateljnih simbola $\{\forall, \neg, \land\}$, a drugi put, skupom djelateljnih simbola $\{\exists, \neg, \lor\}$!

7. Preoblikujte sljedeća dva iskaza svaki u istovrijedan iskaz u kojem se $\neg$ javlja samo pred iskaznim/priročnim slovima (*niječni normalni oblik*):

$$\neg(((P \lor Q) \land \neg(Q \land R)) \lor \neg(P \land Q)),$$
$$\neg \exists x (Px \land \forall y \neg(Qxy \lor Rx)).$$

Preobliku svaki put izvršite na dva načina: jednom se poslužite De Morganovim zakonima za poveznike i količitelje, a drugi put zakonom niječne dvojnosti.

Poglavlje 3

POUZDANOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA

Od više mogućih načina kako definirati deduktivni sustav logike prvoga reda ovdje se odlučujemo za sustav naravne dedukcije Jaśkowski-Fitchova stila (v. Treći dio, odjeljke 8.3 i 9.3). Metateorijski simbol $\vdash$ označuje dokažljivost (sintaktičnu posljedicu) upravo u tome deduktivnome sustavu. Tj. $\Gamma \vdash p$ znači da je p dokažljivo iz skupa Γ prema dokaznim pravilima toga deduktivnoga sustava. Važno je upozoriti da se inače vrlo često pojam dokažljivosti razumije u (užem) smislu dokažljivosti iz praznoga skupa ($\Gamma = \varnothing$). Ovdje ćemo pod dokažljivošću podrazumijevati i dokažljivost iz nepraznoga skupa Γ ("hipotetični dokaz").

Ako je dokaz (u naravnome deduktivnome sustavu) ispravno izgrađen, tj. u skladu s dokaznim pravilima, onda za svaki redak n u dokazu vrijedi da $\Gamma_n \vdash p_n$. Evo primjera jednostavnijega dokaza:

$$
\begin{array}{r|lll}
1 & \forall x(Px \to Qx) & & \\
2 & \underline{\exists x Px} & & \\
3 & & \underline{Pc} & \\
4 & & Pc \to Qc & 1\ \mathrm{i}\forall \\
5 & & Qc & 3,4\ \mathrm{i}\to \\
6 & & \exists x Qx & 5\ \mathrm{u}\exists \\
7 & \exists x Qx & & 2, 3\text{–}6\ \mathrm{i}\exists
\end{array}
$$

Ovo je raščlamba dokaza:

Γ_n, (pretpostavke koje vrijede u retku n)	p_n, (iskaz izveden u retku n)	$\Gamma_n \vdash p_n$, (dokažljivost u retku n)
$\Gamma_1 = \{\forall x(Px \to Qx)\}$	$p_1 = \forall x(Px \to Qx)$	$\Gamma_1 \vdash p_1$
$\Gamma_2 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px\}$	$p_2 = \exists x Px$	$\Gamma_2 \vdash p_2$
$\Gamma_3 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px, Pc\}$	$p_3 = Pc$	$\Gamma_3 \vdash p_3$
$\Gamma_4 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px, Pc\}$	$p_4 = Pc \to Qc$	$\Gamma_4 \vdash p_4$
$\Gamma_5 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px, Pc\}$	$p_5 = Qc$	$\Gamma_5 \vdash p_5$
$\Gamma_6 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px, Pc\}$	$p_6 = \exists x Qx$	$\Gamma_6 \vdash p_6$
$\Gamma_7 = \{\forall x(Px \to Qx), \exists x Px\}$	$p_7 = \exists x Qx$	$\Gamma_7 \vdash p_7$

3.1 Poučak o pouzdanosti

Poučak o pouzdanosti kaže da dokazna pravila čuvaju istinitost: ako smo krenuli od istine, zaključujući prema tim pravilima, uvijek ćemo doći do istine. Tj., ako je iskaz p dokažljiv iz nekoga skup iskaza Γ, onda je p i semantička posljedica skupa Γ:

POUČAK 3.1 (POUZDANOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA PRVOGA REDA S =) *Ako* $\Gamma \vdash p$, *onda* $\Gamma \models p$.

Dokaz

Poučak ćemo dokazati matematičkom indukcijom tako da tvrdnju o pouzdanosti najprije dokažemo za

- prvi redak dokaza, a zatim
- za svaki n+prvi redak pod pretpostavkom (induktivnom hipotezom) da je pouzdan svaki redak do uključujući n-toga.

Kažemo da je riječ o matematičkoj indukciji na duljinu dokaza. Pritom je **duljina dokaza** broj redaka u dokazu. Prema poučku o pouzdanosti:

> Za svaki redak n u dokazu vrijedi da skup Γ_n pretpostavaka koje vrijede u retku n, ima kao (semantičku) posljedicu iskaz upisan u redak n, p_n, ukoliko je p_n ispravno deduktivno izveden iz Γ_n.

Tj.

za svaki redak n, ako $\Gamma_n \vdash p_n$, onda $\Gamma_n \models p_n$.

Kraće ćemo umjesto

ako $\Gamma_n \vdash p_n$, onda $\Gamma_n \models p_n$

jednostavno pisati:

redak n je pouzdan.

Evo sada i matematičke indukcije kojom se dokazuje pouzdanost svakoga retka u dokazu u logici prvoga reda s istovjetnošću:

1 Redak je 1 pouzdan.
2 *Ako* su redak n i svaki prethodni pouzdani (IND. HIP),
onda je pouzdan i redak n+1.

---

3 Svaki je redak n pouzdan.

Dokaz osnovice (premisa 1):

a) Ako je p_1 pretpostavka, onda $\Gamma_1 = \{p_1\}$. Dovoljno je uočiti da nijedan iskaz ne mijenja svoju istinitosnu vrijednost u istome modelu (pod istim tumačenjem), tj. ako je istinit u nekome modelu, uvijek ostaje istinit u tome modelu. Prema tome stoji da $\Gamma_1 \models p_1$. Preglednije prikazano:

Neka $\Gamma_1 = \{p_1\}$,
$\{p_1\} \models p_1$,
dakle $\Gamma_1 \models p_1$.

Prema tome, u slučaju kad dokaz počinje pretpostavkom, redak je 1 toga dokaza pouzdan.

b) Ima još jedan slučaj, koji se javlja u logici s istovjetnošću, a to je primjena pravila u =, tj. upis iskaza oblika c = c u redak 1 bez ikakvih pretpostavaka. U tom slučaju skup je pretpostavaka vrijedećih u prvome retku prazan. No c = c posljedica je praznoga skupa:

$\varnothing \models \mathrm{c} = \mathrm{c}$,

jer je c = c istinito u svakome modelu (tj. predmet označen sa c ostaje u istome modelu uvijek jedan te isti predmet).

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):

Prijelaz iz n-toga retku u n+prvi moguć je u dokazu samo postavljanjem (pod)-pretpostavke ili primjenom nekoga dokaznoga pravila. Dokaz induktivnoga koraka je dokaz da prijelazom u n+prvi redak posljedični odnos ostaje očuvan. Induktivni korak, koji je pogodbena rečenica, dokazujemo (kao i prije) na sljedeći način:

1. prihvatimo da vrijedi prednjak induktivnoga koraka
   (induktivna hipoteza)

2. dokažimo da vrijedi i posljedak induktivnoga koraka.

Zadržimo se samo na nekim tipičnim slučajima.

a) Pouzdanost jednostavnoga dokaza.

Primjer: pravilo i→. Neka se u retku $n+1$ dokazuje q na temelju $p \rightarrow q$ i p u nekim prethodećim redcima i i j:

redak i:	$\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1} \vdash p \rightarrow q$
redak j:	$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1} \vdash p$
redak n+1:	$\Gamma_{n+1} \vdash q$

Pretpostavke koje vrijede u redcima i i j, vrijede i u retku $n+1$, inače se na te retku ne bi moglo primjenjivati pravilo (i→) kako bi se dokazao iskaz u retku $n+1$. Tj. $\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1}$ i $\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1}$. U skladu s time slijedi:

$\Gamma_i \subseteq \Gamma_{n+1} \models p \rightarrow q$	prema induktivnog hipotezi
$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1} \models p$	prema induktivnog hipotezi
dakle $\Gamma_{n+1} \models p \rightarrow q, p$	posljedica skupa je i posljedica nadskupa, poopćeni stavak 8.4
dakle $\Gamma_{n+1} \models q$	prema semantici pogodbe.

b) Pouzdanost u dokazu s poddokazom.

Primjer: pravilo u→. Neka se u retku $n+1$ dokazuje $p \rightarrow q$ na temelju prethodnoga poddokaza iskaza q iz potpretpostavke p (u redcima i do j):

	$\Gamma_j - \{p\} \subseteq \Gamma_{n+1}$	p je pretpostavka u retku i, vrijedi u retku j
dakle	$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1} \cup \{p\}$	

redak j :	$\Gamma_j \subseteq \Gamma_{n+1} \cup \{p\} \vdash q$
redak $n+1$:	$\Gamma_{n+1} \vdash p \rightarrow q$

Stoga vrijedi:

$\Gamma_{n+1} \cup \{p\} \models q$	posljedica je skupa posljedica nadskupa, induktivna hipoteza
dakle $\Gamma_{n+1} \models p \to q$	prema semantici pogodbe

Slično postupamo i kad dokazujemo pouzdanost neizravnoga dokaza.

c) Pouzdanost pravila za količitelje.

Primjer: pravilo i$\exists$. Neka se u retku $n+1$ dokazuje q na temelju $\exists \mathrm{x}p$ u retku i i poddokaza q iz $p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$ u redcima j do k. Posljedični se odnos dokazuje slično kao i za jednostavni dokaz, s time da posebno treba dokazati sljedeću tvrdnju:

ako $\Gamma_{n+1} \models \exists \mathrm{x}p$ i $\Gamma_{n+1} \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \models q$, onda $\Gamma_{n+1} \models q$,
pod uvjetom za c kao u pravilu i$\exists$(c se ne javlja u članovima Γ, $\exists xp$, ni u q).

Dokažimo tu tvrdnju za skup Δ općenito, pod analognim uvjetima za c.

Neka $\Delta \models \exists \mathrm{x}p$,
neka $\Delta \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \models q$ (c se ne javlja u članovima Δ, u $\exists \mathrm{x}p$ ni u q),
– neka $\Delta \not\models q$,
– dakle ima model $\mathfrak{M}$ takav da $\mathfrak{M} \models \Delta$, ali $\mathfrak{M} \not\models q$,
– dakle $\mathfrak{M} \not\models p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$ (v. drugu pretpostavku),
– dakle $\mathfrak{M} \models \exists \mathrm{x}p$ (v. prvu pretpostavku i četvrti redak),
– neka je $\mathfrak{M}'$ kao i $\mathfrak{M}$, osim što $[\![\mathrm{c}]\!]^{\mathfrak{M}'}$ zadovoljava p ($\mathfrak{M}' \models \exists \mathrm{x}p$ jer $\mathfrak{M} \models \exists \mathrm{x}p$),
– tada, $\mathfrak{M}' \models \Delta$ (kao i $\mathfrak{M}$), $\mathfrak{M}' \models p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$,
– ali $\mathfrak{M}' \not\models q$ (kao ni $\mathfrak{M}$),
– dakle $\Delta \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \not\models q$ (suprotno drugoj pretpostavci),
dakle $\Delta \models q$ (reducto ad absurdum).

d) V. vježbu 2 na str. 28 (istovjetnost).

Slijedi da je **sustav naravne dedukcije za logiku prvoga reda s istovjetnošću pouzdan**.

Slučaj a) osnovice i slučaji a) i b) induktivnoga koraka (tj. sva dokazna pravila za iskaznu logiku) dostaju za dokaz pouzdanosti deduktivnoga sustava iskazne logike. Slučaj b) osnovice, kao ni slučaj d) induktivnoga koraka, nisu potrebni za dokaz pouzdanosti logike prvoga reda bez istovjetnosti. $\dashv$

Iz pouzdanosti slijedi i sljedeći stavak:

STAVAK 3.1 *Ako je Γ zadovoljiv, onda je Γ suvisao.*[1]

Dokaz
- Neka je Γ nesuvisao
- dakle $\Gamma \vdash p, \Gamma \vdash \neg p$
- dakle $\Gamma \models p, \Gamma \models \neg p$ (poučak o pouzdanosti)
- dakle Γ je nezadovoljiv (stavak 4 iz 12.1)

dakle ako je Γ zadovoljiv, onda je Γ suvisao (protupostav). $\dashv$

3.2 Suvislost deduktivnoga sustava

DEFINICIJA 3.1 (SUVISLOST (KONSISTENTNOST) DEDUKTIVNOGA SUSTAVA) *Sustav je logike prvoga reda s istovjetnošću suvisao akko u njem nisu poučci i p i $\neg p$.*

Suvislost deduktivnoga sustava slijedi iz njegove pouzdanosti.

STAVAK 3.2 *Deduktivni sustav logike prvoga reda s istovjetnošću je suvisao.*

Dokaz Na temelju prethodnoga stavka (3.1) slijedi da, ako je prazan skup nesuvisao, onda je i nezadovoljiv. Drugim riječima, ako su u sustavu i p i $\neg p$ poučci, onda su oboje i valjani. No ni u jednome modelu logike prvoga reda nisu i p i $\neg p$ istiniti (v. vježbu 6).

3.3 Zadatci

1. Pogledajte primjer dokaza za jedan slučaj stavka 9.7 na str. 118. Ispišite redak po redak koji je iskaz dokažljiv iz kojega skupa u dotičnome retku.

2. Upotpunite dokaz pouzdanosti dokazom induktivnoga koraka za slučaje uvođenja i isključenja istovjetnosti.

3. Prema uzoru na dokaz pouzdanosti pravila i$\exists$ pokušajte dokazati pouzdanost pravila u$\forall$.

4. Usporedite pojmove suvislosti skupa Γ i suvislosti deduktivnoga sustava (logike prvoga reda). U čem je razlika?

[1] 'Suvisao' rabimo sinonimno s 'konsistentan'. Obje riječi u naravnome jeziku imaju i donekle drukčije značenje od tehničkoga u logici (teoriji dokaza)(usp., primjerice, 'konsistentna masa').

5. Ako je skup $\emptyset$ nezadovoljiv, ima li neki skup Γ koji je zadovoljiv? Obrazložite odgovor.

6. Dokažite matematičkom indukcijom na duljinu iskaza da ni u jednome modelu logike prvoga reda ne mogu biti istiniti i p i $\neg p$.

Poglavlje 4

POTPUNOST DEDUKTIVNOGA SUSTAVA

4.1 Maksimalni suvisli i ω-potpuni skupovi

Zadržimo se najprije na sintaktičnim pojmovima maksimalnoga suvisloga skupa, ω-potpunoga i zasićenoga skupa, te na nekim njihovim svojstvima. Nakon što uvedemo i semantički pojam kanonskoga modela, moći ćemo dati dokaz potpunosti deduktivnoga sustava logike prvoga reda (također i logike prvoga reda s istovjetnošću). – Napomenimo da je i *suvislost sustava* sintaktički pojam, iako smo ju u prethodnome poglavlju dokazali pomoću pouzdanosti sustava, dakle na temelju zaključivanja koje je uključuje semantičke pojmove.

4.1.1 Maksimalan suvisao skup iskaza

Što je maksimalan suvisao skup?

Definirajmo najprije maksimalan suvisao skup iskaza u logici prvoga reda bez istovjetnosti i dokažimo neka zanimljiva i važna svojstva maksimalnih suvislih skupova. Podrazumijevamo da se uvijek radi o iskazima jezika $\mathscr{L}_p$ i deduktivnome sustavu logike prvoga reda bez istovjetnosti (v. dio III, poglavlje 9).

DEFINICIJA 4.1 (MAKSIMALAN SUVISAO SKUP) Γ^{max} *je maksimalan suvisao skup iskaza akko je*

1. Γ^{max} *suvisao, a*

2. *svaki* pravi *nadskup skupa* Γ^{max} *nesuvisao.*

Usp. definicije 8.20 nesuvislosti i 8.14 dokaza (u poopćenom smislu, proširenome i na logiku prvoga reda). – Također, općenito kažemo (u teoriji skupova) da je Δ *pravi nadskup* skupa Γ, tj. $\Delta \supset \Gamma$, akko je (a) Δ *nadskup* skupa Γ ($\Delta \supseteq \Gamma$, tj. svi članovi skupa Γ članovi su skupa Δ), i (b) ima član skupa Δ koji *nije član* skupa Γ. U istome slučaju kažemo i da je Γ pravi podskup skupa Δ, tj. $\Gamma \subset \Delta$.

STAVAK 4.1 *Ako je iskaz p dokažljiv iz maksimalnoga suvisloga skupa* Γ^{max}*, onda je p član* Γ^{max}*. Kraće*

$$\textit{ako } \Gamma^{max} \vdash p, \ \textit{onda } p \in \Gamma^{max}.$$

Dokaz

Neka je Γ^{max} maksimalan suvisao skup	
Neka $\Gamma^{max} \vdash p$	
– neka $p \notin \Gamma^{max}$	
– dakle $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ je nesuvisao	prema definiciji 4.1
– dakle $\Gamma^{max} \vdash \neg p$	poopćeni stavak 8.12
– ali $\Gamma^{max} \vdash p$	druga pretpostavka
– dakle Γ^{max} je nesuvisao	poopćena def. 8.20 nesuvisloga skupa
– ali Γ^{max} je suvisao	prema definiciji 4.1
dakle $p \in \Gamma^{max}$	red. ad absurdum ⊣

Lindenbaumova lema

LEMA 4.1 (LINDENBAUMOVA LEMA) *Svaki suvisao skup iskaza podskup je barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa.*

Dokaz

Dokaz se sastoji od dvaju dijelova:

1. izgradnja nadskupa Θ za po volji izabran suvisao skup Γ,
2. dokaz da je skup Θ maksimalan suvisao skup.

1. *Izgradnja nadskupa* Θ *za po volji izabran skup* Γ

Svi se iskazi jezika $\mathscr{L}_{p=}$ mogu poredati u niz

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

tako da svaki iskaz dobije kao pokazatelj pozitivan cijeli broj, te možemo govoriti o prvom, drugom, trećem itd. iskazu. Primjerice, u tu se svrhu svakomu simbolu logičkoga jezika može na poseban način pridružiti pozitivan cijeli broj, a zatim se svi simboli u danoj formuli zamijeniti pridruženim brojevima. Na taj način svaka formula može dobiti svoj jedinstveni broj, a tako dobiveni brojevi mogu se potom poredati po veličini. (To da je moguće tako poredati formule, temelji se na tome da je skup svih formula prebrojiv, o čem usp. str. 49.)

Polazimo od zadanoga suvisloga skupa iskaza $\Gamma = \Gamma_1$ i prolazimo kroz iskaze $p_1, p_2, p_3, \ldots$, jedan po jedan, dodajući svakoga od njih prethodno dobivenomu skupu ako i samo ako time dobivamo suvisao skup. Dobivamo niz skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$:

Γ_1 je polazišni suvisao skup (Γ).
Γ_2 - čini li skup Γ_1 s iskazom p_1 nesuvisao skup:
ako da, $\Gamma_2 = \Gamma_1$,
ako ne, $\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{p_1\}$.
Γ_3 - čini li skup Γ_2 s iskazom p_2 nesuvisao skup:
ako da, $\Gamma_3 = \Gamma_2$,
ako ne, $\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{p_2\}$.
itd.

Općenito:

$$\Gamma_{n+1} = \begin{cases} \Gamma_n & \text{ako je } \Gamma_n \cup \{p_n\} \text{ nesuvislo} \\ \Gamma_n \cup \{p_n\} & \text{inače.} \end{cases}$$

Svaki je od skupova u izgrađenome nizu podskup idućega, tj. $\Gamma_n \subseteq \Gamma_{n+1}$.

Sada definiramo skup Θ kao uniju svih skupova u izgrađenome nizu, $\bigcup_n \Gamma_n$, tj., skup koji sadrži svaki iskaz koji je član barem jednoga skupa u nizu. (Primijetimo da u drukčijem poretku iskaza, i skup $\bigcup_n \Gamma_n$ može biti drukčiji.) Iz toga slijedi da $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Theta$.

2. *Dokaz da je Θ maksimalan suvisao skup*

U skladu s definicijom 4.1 maksimalnoga suvisloga skupa dokazujemo dvije stvari:

a) da je Θ suvisao,

b) da je svaki pravi nadskup skupa Θ nesuvisao.

Dokaz za *a*) (Θ je suvisao). Kad bi Θ bio nesuvisao, morao bi neki njegov konačan podskup, koji je podskup nekoga od skupova Γ_i u nizu $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$, biti nesuvisao, što protuslovi načinu gradnje niza $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$:

- Neka je Θ nesuvisao.
- Dakle, neki je konačan skup $\{p_i, \ldots p_m\} \subseteq \Theta$ nesuvisao, gdje su $i, \ldots, m$ poredani po veličini, ali ne moraju neposredno slijediti jedan iza drugoga (poopćene def. 8.20 nesuvislosti i 8.14 dokaza),
- ali za svaki $p \in \{p_i, \ldots p_m\}$ vrijedi da $p \in \Gamma_{m+1}$, prema pravilu izgradnje skupa Θ,
- dakle Γ_{m+1} je nesuvisao (poopćeni stavak 8.11)
- no svaki je skup Γ_i u nizu $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$ suvisao (prema načinu gradnje skupova $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \ldots$)
- dakle Γ_{m+1} je suvisao, čime dobivamo protuslovlje.

Dakle, Θ je suvisao (red. ad absurdum).

Dokaz za *b*) (svaki je pravi nadskup skupa Θ nesuvisao).

U gradnji skupa Θ uzimaju se u obzir svi iskazi, pa je svako suvislo proširenje skupa Θ već izvršeno u gradnji. Dokaz je neizravan:

Neka $\Theta \subset \Theta'$	
– neka je Θ' suvisao	
– dakle ima p_i takav da $p_i \notin \Theta$ i $p_i \in \Theta'$	prema def. pravoga nadskupa
– dakle, $\Theta \cup \{p_i\}$ je suvisao	prema poopćenom stavku 8.11
– dakle je $\Gamma_i \cup \{p_i\}$ suvisao	Γ_i je skup u postupku izgradnje skupa Θ
– dakle $p_i \in \Gamma_{i+1}$	prema postupku izgradnje skupa Θ
– dakle $p_i \in \Theta$ (protuslovlje s 3. retkom)	prema definiciji skupa Θ
dakle Θ' nije suvisao.	

Drugim riječima, Θ nije pravi podskup nijednoga suvisloga skupa. To, zajedno s dokazanim uvjetom *a*), da je Θ suvisao skup, dokazuje da je Θ maksimalan suvisao skup (prema dvama uvjetima u definiciji 4.1 maksimalnoga suvisloga skupa). $\dashv$

Članstvo u maksimalnome suvislome skupu

STAVAK 4.2 *Ako je Γ^{max} maksimalan suvisao skup, onda*

1. $\neg p \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \notin \Gamma^{max}$,
2. $p \wedge q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \in \Gamma^{max}$ *i* $q \in \Gamma^{max}$,
3. $p \vee q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \in \Gamma^{max}$ *ili* $q \in \Gamma^{max}$,
4. $p \rightarrow q \in \Gamma^{max}$ *akko* $p \notin \Gamma^{max}$ *ili* $q \in \Gamma^{max}$,

5. *$p \leftrightarrow q \in \Gamma^{max}$ akko $p, q \in \Gamma^{max}$, ili $p, q \notin \Gamma^{max}$.*

Dokaz

1. *a*) Neka $\neg p \in \Gamma^{max}$,
−neka $p \in \Gamma^{max}$,
−dakle $\{p, \neg p\} \subseteq \Gamma^{max}$,
−dakle Γ^{max}je nesuvisao,
što protuslovi pretpostavci,
dakle $p \notin \Gamma^{max}$ (red. ad absurdum).

b) Neka $p \notin \Gamma^{max}$,
dakle $\Gamma^{max} \cup \{p\}$ je nesuvislo
(definicija 4.1),
dakle $\Gamma^{max} \vdash \neg p$ (poopćeni
stavak 8.12),
dakle $\neg p \in \Gamma^{max}$ (stavak 4.1).

Dakle, $\neg p \in \Gamma^{max}$ akko $p \notin \Gamma^{max}$.

2. *a*) Neka $p \wedge q \in \Gamma^{max}$,
dakle $\{p \wedge q\} \subseteq \Gamma^{max}$,
$\{p \wedge q\} \vdash p, q$,
dakle $\Gamma^{max} \vdash p, \Gamma^{max} \vdash q$
dakle $p, q \in \Gamma^{max}$.

b) Vježba!

Dakle, $p \wedge q \in \Gamma^{max}$ akko $p, q \in \Gamma^{max}$.

3. *a*) Neka $p \vee q \in \Gamma^{max}$,
−neka $p, q \notin \Gamma^{max}$,
−dakle $\{p \vee q, \neg p, \neg q\} \subseteq \Gamma^{max}$
(slučaj 1 ovoga dokaza)
−$\{p \vee q, \neg p, \neg q\}$ je nesuvislo
(De Morganovi zakoni,
poopćenje stavka 8.13),
−dakle Γ^{max} je nesuvisao,
što protuslovi pretpostavci,
dakle $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$
(red. ad absurdum).

b) Neka $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$,
dakle $\{p\} \subseteq \Gamma^{max}$ ili
$\{q\} \subseteq \Gamma^{max}$,
$\{p\} \vdash p \vee q, \{q\} \vdash p \vee q$ (u$\vee$),
dakle $\Gamma^{max} \vdash p \vee q$
(poopćeni stav. 8.8),
dakle $p \vee q \in \Gamma^{max}$ stav.4.1.

Dakle, $p \vee q \in \Gamma^{max}$ akko $p \in \Gamma^{max}$ ili $q \in \Gamma^{max}$.

Za dovršetak dokaza v. vježbu 1 na str. 44. $\dashv$

4.1.2 ω-potpun skup iskaza

Prije definiranja pojma ω-potpunoga skupa uvodimo jednostavan postupak množenja pokazatelja na predmetnim konstanatama s 2 (u nekome zadanome skupu iskaza), kojim osiguravamo beskonačnu zalihu novih konstanata (jer ima beskonačno mnogo neparnih konstanata). Ta će nam zaliha biti potrebna pri izgradnji ω-potpunih skupova. Evo najprije stavka o skupovima samo s parnim pokazateljima na konstantama.

STAVAK 4.3 *Neka je Γ suvisao skup iskaza, a Γ^P skup koji je nastao od Γ množenjem svih pokazatelja na predmetnim konstantama s 2. Γ^P je suvisao akko je Γ suvisao.*

Dokaz Ako je Γ^P nesuvisao, i Γ je nesuvisao, jer ako ima dokaz nesuvislosti Γ^P (dokaz protuslovlja iz Γ^P), onda gotovo jedanak dokaz vrijedi i kao dokaz nesuvislosti Γ. Razlika je samo u pokazateljima na konstantama zadanoga skupa i, prema slučaju i potrebi, u novouvedenim konstantama (jer pri primjeni pravila i$\exists$ i u$\forall$ konstante moraju biti nove). – Zbog istoga razloga vrijedi, ako je Γ nesuvisao, da je i Γ^P nesuvisao. $\dashv$

Što je ω-potpun skup iskaza?

DEFINICIJA 4.2 (ω-POTPUN SKUP) *Skup Γ jest ω-potpun akko za svaku formulu p s jedinom slobodnom varijablom* x *ima barem jedna konstanta* k *iz nekoga skupa predmetnih konstanata* K*, takva da vrijedi:*

$$\Gamma \cup \{\exists \mathrm{x} p\} \vdash p(\mathrm{k}/\mathrm{x})$$

Predmetnu konstantu k iz gornje definicije nazivljemo **svjedokom** za skup Γ. Skup K, u pristupu koji ovdje primjenjujemo, jednak je skupu predmetnih konstanata jezika $\mathscr{L}_{p=}$ (logike prvoga reda s istovjetnošću).

Lema o ω-potpunome skupu

LEMA 4.2 (O ω-POTPUNOME SKUPU) *Svaki je suvisao skup samo s parnim pokazateljima na predmetnim konstantama podskup barem jednoga suvisloga ω-potpunoga skupa.*

Dokaz: Dokaz se (slično dokazu Lindenbaumove leme) sastoji od dvaju dijelova:

1. izgradnja nadskupa skupa Λ za po volji izabran suvisao skup Γ, pri čem u Γ predmetne konstante imaju samo parne pokazatelje,

2. dokaz da je Λ suvisao i ω-potpun skup.

1. *Izgradnja nadskupa Λ za po volji izabran skup Γ samo s parnim pokazateljima na konstantama*

Sve formule jezika $\mathscr{L}_p$ koje imaju samo jednu slobodnu varijablu (koja se može u formuli javljati više puta), poredamo u niz, tako da dobijemo prvu, drugu, treću itd. takvu formulu:

$$p_1, p_2, p_3, \ldots$$

Također, sve predmetne konstante jezika $\mathscr{L}_p$ poredamo u niz prema abecednom redu i prema pokazateljima tako da dobijemo prvu, drugu, treću itd. konstantu:

$$c, d, e, c_1, \ldots$$

Neka $\Gamma = \Gamma_1$. Sada tvorimo Γ_2 tako da skupu Γ_1 dodamo formulu $\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})$, gdje p_1 sadrži slobodnu varijablu x, a k_1 je prva konstanta u nizu konstanata koja nije sadržana u Γ_1 ni u p_1 (dakle to ne mora biti abecedno prva konstanta uopće, c). Slično tvorimo Γ_3 dodajući skupu Γ_2 pogodbu $\exists \mathrm{x} p_2 \to p_2(\mathrm{k}_2/\mathrm{x})$, gdje p_2 sadrži slobodnu varijablu x, a k_2 je prva konstanta u nizu konstanata koja nije sadržana u Γ_2 ni u p_2. dakle

$\Gamma_1 = \Gamma$,
$\Gamma_2 = \Gamma_1 \cup \{\exists \mathrm{x} p_1 \to p_1(\mathrm{k}_1/\mathrm{x})\}$,
$\Gamma_3 = \Gamma_2 \cup \{\exists \mathrm{x} p_2 \to p_2(\mathrm{k}_2/\mathrm{x})\}$,
itd.

Općenito:

$$\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x})\},$$

gdje je

p_n n-ta formula koji sadrži samo jednu slobodnu varijablu, x, a
k_n abecedno prva predmetna konstanta koja nije sadržana u skupu Γ_n ni u p_n.

Neka $\Lambda = \bigcup \Gamma_n$. Tada vrijedi da $\Gamma = \Gamma_1 \subseteq \Lambda$.

2. *Dokaz da je Λ suvisao i ω-potpun skup*

Dokazujemo sljedeće: Λ je

a) suvisao,

b) ω-potpun.

Dokaz za *a*) (Λ je suvisao).
$\Gamma_1 = \Gamma$ jest suvisao prema pretpostavci.
Najprije matematičkom indukcijom dokazujemo da je svaki Γ_n u nizu koji dobivamo gradnjom skupa Λ, suvisao:

1 Γ_1 je suvisao.
2 *Ako* je skup Γ_n suvisao (INDUKTIVNA HIPOTEZA),
onda je i skup Γ_{n+1} suvisao.

---

3 Svaki je skup Γ_n suvisao.

Dokaz osnovice (premisa 1): istinita je prema definiciji postupka izgradnje skupa Λ.
Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):

Γ_n je suvisao	induktivna hipoteza
−Neka je Γ_{n+1} nesuvisao	
−dakle $\Gamma_n \cup \{\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x})\}$ je nesuvisao	
−dakle $\Gamma_n \vdash \neg(\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x}))$	poopćeni stav. 8.12
−dakle $\Gamma_n \vdash \exists \mathrm{x} p_n$	prema ded. sustavu
−dakle $\Gamma_n \vdash \neg p_n(\mathrm{c}_n/\mathrm{x})$	prema ded. sustavu
−dakle $\Gamma_n \vdash \forall \mathrm{x} \neg p_n$	u$\forall$, jer je k_n nova konstanta
−dakle $\Gamma_n \vdash \neg\exists \mathrm{x} p_n$ (protuslovlje s 5. retkom)	prema ded. sustavu,
dakle $\Gamma_{n+1} = \Gamma_n \cup \{\exists \mathrm{x} p_n \to p_n(\mathrm{k}_n/\mathrm{x})\}$ je suvisao.	

Primijetimo kako nam je u dokazu induktivnoga koraka poziv na *novu* konstantu c_1 omogućio uvođenje općega količitelja i izvođenje protuslovlja. Zbog istoga se razloga i u proširenju svakoga skupa Γ_n kao oprimjerujuća konstanta rabi uvijek nova konstanta c_n. Upravo zboga toga nam je i bila potrebna beskonačna zaliha novih, neparnih, konstanata, koja je osigurana množenjem s 2 svakoga pokazatelja na konstantama u polaznome skupu.

Sada slijedi da je $\Lambda = \bigcup_n \Gamma_n$ suvisao. Naime svaki član skupa Λ (kao unije) član je barem jednoga Γ_n u nizu nadskupova suvisloga skupa Γ_1, jer svako novo proširenje (u neki nadskup Γ_n), prema gornjoj matematičkoj indukciji, čuva suvislost.

Dokaz za *b*) (Λ je ω-potpun). Proširimo skup Λ bilo kojim opstojnim iskazom $\exists \mathrm{x} p$, gdje p ima x kao jedinu slobodnu varijablu.

$\exists \mathrm{x} p \to p(\mathrm{k}/\mathrm{x}) \in \Lambda$	prema načinu gradnje Λ
dakle $\Lambda \cup \{\exists \mathrm{x} p\} \vdash p(\mathrm{k}/\mathrm{x})$	i $\to$

Prema tome Λ je ω-potpun skup.

STAVAK 4.4 *Ako je Γ_ω ω-potpun skup, onda je i svaki njegov nadskup Γ'_ω ω-potpun.*

Dokaz Općenito, proširenjem skupa Γ u skup Γ' dodavanjem novih iskaza, posljedice dokažljive iz Γ ostaju dokažljive i iz skupa Γ' (prema poopćenju stavka 8.8 za logiku prvoga reda).

Neka $\Gamma_\omega \vdash \exists \mathrm{x} p \to p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$, te
neka $\Gamma_\omega \subseteq \Gamma'_\omega$,
dakle $\Gamma'_\omega \vdash \exists \mathrm{x} p \to p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$.

Prema tome, ako je Γ_ω ω-potpun, onda je i njegov nadskup Γ'_ω također ω-potpun. $\dashv$

4.1.3 Zasićen skup

Što je zasićen skup?

DEFINICIJA 4.3 (ZASIĆEN SKUP) *Skup je iskaza Γ zasićen akko je Γ maksimalan suvisao i ω-potpun skup.*

Članstvo u zasićenome skupu

O svakome zasićenome skupu vrijedi sljedeći stavak:

STAVAK 4.5 (O ZASIĆENOME SKUPU) *Ako je $\Gamma^{\max}_\omega$ zasićen skup iskaza, onda vrijedi:*

1.–5. kao i u stavku 4.2,

6. $\forall \mathrm{x} p \in \Gamma^{\max}_\omega$ *akko za svaki* c, $p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{\max}_\omega$,

7. $\exists \mathrm{x} p \in \Gamma^{\max}_\omega$ *akko za neki* c, $p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{\max}_\omega$.

Dokaz
Slučaj 6.

$\forall \mathrm{x} p \notin \Gamma^{\max}_\omega$ akko $\neg\forall \mathrm{x} p \in \Gamma^{\max}_\omega$ (stavak 4.2)

akko $\exists x \neg p \in \Gamma_\omega^{max}$ (stavak 4.1)
akko barem za jedan c, $\neg p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ (jer je Γ_ω^{max} ω-potpun, i $\to$)
akko nije za svaki c, $p(c/x) \in \Gamma_\omega^{max}$ (stavak 4.2). $\dashv$

Slučaj 7. Dokaz slijeva nadesno temelji se na ω-potpunosti skupa Γ_ω^{max} i na pravilu i$\to$. Dokaz zdesna nalijevo temelji se na pravilu u$\exists$. $\dashv$

4.2 Kanonski modeli

4.2.1 Što je kanonski model

Neka je Γ_ω^{max} zasićen skup. Tvrdimo da je i zadovoljiv, i to sljedećim, kanonskim, modelom $\mathfrak{M}^{kan}$:

DEFINICIJA 4.4 (KANONSKI MODEL $\mathfrak{M}^{kan} = \langle D^{kan}, \mathcal{I}^{kan} \rangle$ ZA ZASIĆEN SKUP Γ_ω^{max})

1. D^{kan} = *skup svih predmetnih konstanata jezika* $\mathscr{L}_p$,
2. *za svaku predmetnu konstantu* c, $\mathcal{I}^{kan}(c) = c$,
3. *za svaki prirok* P^n, $\langle c_1, \dots, c_n \rangle \in \mathcal{I}^{kan}(P^n)$ *akko* $Pc_1 \dots c_n \in \Gamma_\omega^{max}$.

4.2.2 Zadovoljivost zasićenih skupova

Sljedeći stavak tvrdi da kanonski model $\mathfrak{M}^{kan}$ izgrađen prema maksimalnome i ω-potpunome suvislome skupu Γ_ω^{max} zadovoljava skup Γ_ω^{max}.

STAVAK 4.6 (KANONSKA ZADOVOLJIVOST) *Za svaki iskaz p,* $\mathfrak{M}^{kan} \models p$ *akko* $p \in \Gamma_\omega^{max}$.

Dokaz Provodi se matematičkom indukcijom.

1 Za svaki iskaz p s 0 pojavaka djelatelja, $\mathfrak{M}^{kan} \models p$ akko $p \in \Gamma_\omega^{max}$.
2 *Ako* za svaki iskaz p s n ili manje pojavaka djelatelja, $\mathfrak{M}^{kan} \models p$ akko $p \in \Gamma_\omega^{max}$ (IND.HIP.),
onda za svaki iskaz p s $n+1$ pojavkom djelatelja, $\mathfrak{M}^{kan} \models p$ akko $p \in \Gamma_\omega^{max}$.

---

3 Za svaki iskaz p, $\mathfrak{M}^{kan} \models p$ akko $p \in \Gamma_\omega^{max}$.

Dokaz osnovice (premisa 1):
Kako svaka predmetna konstanta u $\mathfrak{M}^{\text{kan}}$ označuje samu sebe, jasno je da

$$\mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \text{ akko } \langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{P}^n).$$

A iz definicije kanonskoga modela dalje proizlazi da

$$\langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{P}^n) \text{ akko } \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \in \Gamma_\omega^{\max}.$$

Dokaz induktivnoga koraka (premisa 2):
Zadržimo se na nekim slučajima iskaza p duljine $n + 1$.
Slučaj $p = \neg q$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \neg q \quad & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \not\models q \\ & \text{akko} \quad q \notin \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad \neg q \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 4.5).} \end{aligned}$$

Slučaj $p = q \wedge r$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q \wedge r \quad & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q, \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models r \\ & \text{akko} \quad q, r \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad (q \wedge r) \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 4.5).} \end{aligned}$$

Slučaj $p = \exists \mathrm{x} q$.

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models \exists \mathrm{x} q \quad & \text{akko} \quad \text{neki predmet c zadovoljava } q \text{ za } \mathfrak{M}^{\text{kan}} \\ & \text{akko} \quad \mathfrak{M}^{\text{kan}} \models q(c/x) \text{ (jer je predmet c označen konstantom c)} \\ & \text{akko} \quad q(c/x) \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (ind. hipoteza)} \\ & \text{akko} \quad \exists \mathrm{x} q \in \Gamma_\omega^{\max} \text{ (stavak 4.5).} \end{aligned}$$

Slično se mogu dokazati i ostali slučaji. Time se dokazuje zaglavak (3) da je svaki iskaz istinit u kanonskome modelu nekoga zasićenoga skupa akko je član toga zasićenoga skupa. ⊣

KOROLARIJ 4.1 *[Zadovoljivost zasićenoga skupa] Svaki je zasićen skup iskaza zadovoljiv.*

Dokaz Na temelju stavka 4.6 vrijedi da se za svaki zasićen skup može izgraditi kanonski model koji zadovoljava skup. ⊣

Vrijedi i sljedeći stavak o bilo kojem skupu Γ^P samo s parnim pokazateljima na konstantama:

STAVAK 4.7 *Γ^P je zadovoljiv akko je Γ zadovoljiv.*

Dokaz Ključ je dokaza sljedeća činjenica. Ako je skup Γ zadovoljiv nekim tumačenjem $\mathcal{T}$ (u modelu $\mathfrak{M}$), onda je zadovoljiv i skup Γ^P, i to tumačenjem $\mathcal{T}'$ (u modelu $\mathfrak{M}'$) koje je kao i $\mathcal{T}$, s time da $\mathcal{T}(\mathrm{c}_n) = \mathcal{T}'(\mathrm{c}_{2n})$. Vrijedi i obratno. ⊣

4.3 Iskazna logika i logika s funkcijama

NAPOMENA 4.1 (ISKAZNA LOGIKA) *Za **iskaznu** je **logiku** dostatno za dani maksimalan suvisao skup $\Gamma^{\max}$ definirati kanonsko tumačenje T^{kan} gdje*

$$\textit{za svako iskazno slovo } \mathrm{P},\ T^{\text{kan}}(\mathrm{P}) = \mathbf{i} \textit{ akko } \mathrm{P} \in \Gamma^{\max}_{\omega}.$$

Tada iz definicije kanonskoga tumačenja slijedi da za svaki jednostavan iskaz P, $T^{\text{kan}} \models p$ akko $P \in \Gamma^{\max}_{\omega}$. Na temelju toga i onih dijelova prethodnoga dokaza (za logiku prvoga reda) koji se tiču sastavljenih iskaza, lako je uvidjeti da tumačenje T^{kan} zadovoljava skup $\Gamma^{\max}$. Prema tome je u iskaznoj logici svaki maksimalan suvisao skup zadovoljiv.

NAPOMENA 4.2 (PRIROČNA LOGIKA S FUNKCIJSKIM SIMBOLIMA) *Za priročnu logiku s **funkcijama** dokaz treba proširiti:*

Funkcijski se simbol (f) *u kanonskome modelu za maksimalan suvisao i ω-potpun skup Γ^{max}_{ω} tumači kao i obično, tj. $\mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{f})$ je funkcija $\mathbf{f}\colon (\mathrm{D}^{\text{kan}})^n \longrightarrow \mathrm{D}^{\text{kan}}$. Sada poopćavamao dokaz stavka $\mathfrak{M}^{\text{kan}} \models p$ akko $p \in \Gamma^{\max}_{\omega}$ tako da, umjesto oprimjerujućih konstanata, govorimo o oprimjerujućim zatvorenim predmetnim oznakama (slučaji jednostavnih i pokoličnih iskaza). Tako, primjerice, u slučaju jednostavnih iskaza (*t *je zatvorena predmetna oznaka), dokaz glasi ovako:*

$$\begin{aligned}
\mathfrak{M} \models \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \quad & \textit{akko} \quad \langle \mathrm{c}_1, \ldots, \mathrm{c}_n \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan}}(\mathrm{P}^n),\ \textit{gdje } \mathrm{c}_i = [\![\mathrm{t}_i]\!]^{\mathfrak{M}^{\text{kan}}} \\
& \textit{akko} \quad \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \in \Gamma^{max}_{\omega} \\
& \textit{akko} \quad \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n \in \Gamma^{max}_{\omega}\ (\textit{jer } \mathrm{Pc}_1 \ldots \mathrm{c}_n \dashv\vdash \mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_n)
\end{aligned}$$

4.4 Poučak o potpunosti

4.4.1 Logika prvoga reda

Dokažimo najprije sljedeću tvrdnju:

STAVAK 4.8 *Ako je skup iskaza Δ suvisao, Δ je zadovoljiv.*

Dokaz

- Neka je Δ suvisao,
- dakle suvisao je i Δ^P (stavak 4.3),
- Δ^P je podskup barem jednoga suvisloga skupa Δ_ω koji je ω-potpun (lema 4.2),
- Δ_ω je podskup barem jednoga maksimalnoga suvisloga skupa Δ^{max} (Lindenbaumova lema 4.1),
- $\Delta^{max} = \Delta_\omega^{\max}$, tj. jest ω-potpun (stavak 4.4),
- dakle $\Delta^P \subseteq \Delta_\omega^{\max}$ (def. nadskupa),
- $\Delta_\omega^{\max}$ je zadovoljiv (modelom $\mathfrak{M}^{\text{kan}}$, stavak 4.6),
- dakle i Δ^P je zadovoljiv,
- dakle i Δ je zadovoljiv (stavak 4.7),

dakle ako je Δ suvisao, Δ je zadovoljiv. $\dashv$

Dokažimo sada i sam poučak o potpunosti:

POUČAK 4.1 (POUČAK O POTPUNOSTI) *Ako $\Gamma \models p$, onda $\Gamma \vdash p$.*

Dokaz

Ako je Δ nezadovoljiv, Δ je nesuvisao (prema gornjem stavku 4.8),
dakle ako je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljivo, onda je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvislo (ako $\Delta = \Gamma \cup \{\neg p\}$),
dakle ako $\Gamma \models p$, onda $\Gamma \vdash p$ (poopćenje stavaka 8.2 i 8.12). $\dashv$

4.4.2 Istovjetnost

Najprije je potrebno nadopuniti stavak 4.2 o članstvu u maksimalnim suvislim skupovima (Γ^{max}), i to dvama slučajima.

a) $\mathrm{c} = \mathrm{c} \in \Gamma^{max}$, za svaku predmetnu konstantu c.

Dokaz se osniva na deduktivnome pravilu u=.

b) Ako $\mathrm{c} = \mathrm{d} \in \Gamma^{max}$, onda za svaki iskaz $p(\mathrm{d}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{max}$, $p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{max}$, i za svaki iskaz $p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{max}$, $p(\mathrm{d}/\mathrm{x}) \in \Gamma^{max}$.

Dokaz se osniva na deduktivnome pravilu i=.

Potrebne su odgovarajuće promjene i u dokazu kanonske zadovoljivosti zasićenoga skupa. Kako se sada javljaju i istovjetnosni iskazi, moramo napustiti ideju da svaka predmetna konstanta označuje sebe i dopustiti da više predmetnih konstanata može označivati istu konstantu. Uvodimo pojam **istovrijednosnoga razreda** [c]:

DEFINICIJA 4.5 (ISTOVRIJEDNOSNI RAZRED KONSTANATA, [c], U MODELU $\mathfrak{M}$)

$$[c] = \{c' \mid \mathfrak{M} \models c = c'\}.$$

Sada definiramo kanonski model $\mathfrak{M}^{\text{kan=}}$:

DEFINICIJA 4.6 (KANONSKI MODEL $\mathfrak{M}^{\text{kan=}} = \langle D^{\text{kan=}}, \mathcal{T}^{\text{kan=}} \rangle$ ZASIĆENOGA SKUPA $\Gamma_{\omega}^{\text{max}}$)

1. $D^{\text{kan=}}$ = *skup svih istovrijednosnih razreda za svaku predmetnu konstantu jezika* $\mathscr{L}_{p=}$,
2. *za svaku predmetnu konstantu* c, $\mathcal{T}^{\text{kan=}}(c) = [c]$,
3. *za svaki prirok* P^n *(uključujući i =),* $\langle [c_1], \ldots, [c_n] \rangle \in \mathcal{T}^{\text{kan=}}(P^n)$ *akko* $Pc_1 \ldots c_n \in \Gamma_{\omega}^{\text{max}}$.

Dokazujemo da je svaki iskaz p istinit za model $\mathfrak{M}^{\text{kan=}}$, izgrađen za zasićen skup $\Gamma_{\omega}^{\text{max}}$, ako i samo ako je p član skupa $\Gamma_{\omega}^{\text{max}}$. Dokaz je sličan dokazu za logiku bez istovjetnosti s time da u osnovici matematičke indukcije dodajemo slučaj za istovjetnosne iskaze:

$$\mathfrak{M}^{\text{kan=}} \models c_1 = c_2 \text{ akko } c_1 = c_2 \in \Gamma_{\omega}^{\text{max}}.$$

Dokaz

$\mathfrak{M}^{\text{kan=}} \models c_1 = c_2$
akko $\mathcal{T}^{\text{kan=}}(c_1) = \mathcal{T}^{\text{kan=}}(c_2)$
akko $[c_1] = [c_2]$ (def. 4.6)
akko za svaki c_1', c_2' za koje $c_1 = c_1', c_2 = c_2' \in \Gamma_{\omega}^{max}$, vrijedi da
$c_1' = c_2' \in \Gamma_{\omega}^{max}$ (def. 4.5, 4.6)
akko $c_1 = c_2 \in \Gamma_{\omega}^{max}$ (jer $\{c_1' = c_2', c_1' = c_1, c_2' = c_2\} \vdash c_1 = c_2$,
i jer $\{c_1 = c_2, c_1' = c_1, c_2' = c_2\} \vdash c_1' = c_2'$. ⊣

Ostali se slučaji dokazuju slično kao i za piročnu logiku bez istovjetnosti.

4.5 Zadatci

1. Dopunite dokaz stavka 4.2 (str. 34), o članstvu u maksimalnome suvislome skupu iskaza, dokazom slučaja 4 i 5.

2. Neka je zadan skup $\Gamma_i = \{\neg\forall x Px, \forall x(\neg Px \to Qx)\}$, a neka iskaz p_i =

   (a) $\neg\forall x Qx$,

   (b) $\exists x Qx$,
   (c) $\exists x \neg Qx$,
   (d) $\neg(Pc \vee Qc)$,
   (e) $\neg Qc$.

   Koji iskazi, u svakome od navedenih slučaja, prema Lindenbaumovoj konstrukciji čine skup Γ_{i+1}?

3. Neka je zadan skup $\Gamma_i = \{\exists x \forall y(Pxy \wedge \neg Qyx), \forall x Pxc\}$, a neka $p_i =$

   (a) Qx,
   (b) $Px \rightarrow \neg Qx$,
   (c) $\neg Qx \vee Pdx$,
   (d) Rey,
   (e) $Pz \wedge Qe$.

   Koji iskazi, u svakome od navedenih slučaja, prema konstrukciji suvisloga ω-potpunoga skupa čine skup Γ_{i+1}?

4. Razmislite bi li se u svrhu izgradnje kanonskoga modela mogao kao domena upotrijebiti i neki drugi skup umjesto skupa svih predmetnih konstanata, te obrazložite odgovor.

5. Dokažite stavak 4.6 (na str. 40), o kanonskoj zadovoljivosti, i za slučaje disjunktivnoga i općega iskaza.

6. Neka opseg pojma zadovoljivost čine sve zadovoljivi skupovi, a opseg pojma suvislost svi suvisli skupovi. Kakav je odnos tih dvaju skupova u logici prvoga reda?

7. Zamislimo da logika nije potpuna (ali je pouzdana). Kakav bi tada bio odnos opsega pojmova zadovoljivosti i suvislosti?

Poglavlje 5

PREBROJIVOST, KONAČNOST, ZADOVOLJIVOST

5.1 Beskonačnost i konačnost

Kako bismo mogli razumijeti i definirati još neka svojstva logike prvoga reda koja se odnose na veličinu predmetnoga područja i samih skupova iskaza, ukratko ćemo se prisjetiti nekih osnovih pojmova iz teorije skupova (većinu smo kojih upoznali u srednjoj školi).

Skupovi su A i B *jednakobrojni* (ekvipotentni), $A \approx B$, ako i samo ako između njih opstoji odgovaranje (korespondencija) 1 za 1, tj. obostrano jednoznačno preslikavanje (bijekcija).[1]

Kažemo da istobrojni skupovi imaju isti *kardinalni broj*, $|A| = |B|$.

Skup je A **beskonačan** (Dedekindova beskonačnost) ako i samo ako je jednakobrojan s nekim svojim pravim podskupom. Inače je **konačan**. – Primjerice, beskonačan je skup $\mathbb{N}_0$ (ω, prirodni brojevi, uzimljemo da uključuju i broj 0) kao i skup svih parnih pozitivnih cijelih brojeva, koji je pravi podskup skupa $\mathbb{N}_0$. Primijetimo da je i prazan skup, $\varnothing$, konačan (jer nema svoj pravi podskup).[2]

Skup je **prebrojiv** ako i samo ako je jednakobrojan sa skupom $\mathbb{Z}^+$ (pozitivni cijeli brojevi). Kardinalni je broj svakoga takva skupa $\aleph_0$ (čitamo: "alef nula").

[1] Kako smo već spomenuli u bilješci 1 na str. 6, *funkcija* (preslikavanje) sa skupa A u skup B jest pridruživanje svakomu članu skupa A jednoga člana skupa B. Nadalje, funkcija je *injektivna* ako se različitim članovima uvijek pridružuju različiti članovi, a *surjektivna* ako su svi članovi skupa B pridruženi nekomu članu skupa A. *Bijekcija* (odgovaranje 1 za 1) funkcija je koja je injektivna i surjektivna.

[2] Alternativno: skup je *konačan* ako i samo ako je jednakobrojan s nekim prirodnim brojem. Pri tom je prirodan broj definiran kao skup svih manjih prirodnih brojeva.

– Npr. prebrojiv je skup $\mathbb{Q}$ (racionalni brojevi) – sve racionalne brojeve možemo svrstati u tablicu, a zatim ih postaviti u linearni poredak (pratimo strjelice u donjoj tablici!):

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{1} & \rightarrow & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \rightarrow & \ldots \\
 & \swarrow & & \nearrow & & \swarrow & \\
\frac{2}{1} & & \frac{2}{2} & & \frac{2}{3} & & \ldots \\
\downarrow & \nearrow & & \swarrow & & & \\
\frac{3}{1} & & \frac{3}{2} & & \frac{3}{3} & & \ldots \\
\vdots & \swarrow & \vdots & & \vdots & &
\end{array}$$

Skup je **izbrojiv** ako i samo ako je konačan ili prebrojiv.

Govorimo i o beskonačnim **neprebrojivim** skupovima. To je, primjerice, skup svih realnih brojeva, $\mathbb{R}$, za koji kažemo da ima kardinalni broj $\mathfrak{c}$ (kontinuum). Neprebrojivost se skupa $\mathbb{R}$ dokazuje *dijagonalnim* postupkom: definira se broj n veći od 0 a manji ili jednak 1 ($0 < n \leq 1$), koji se od prvoga broja u pretpostavljenoj tablici svih brojeva toga intervala razlikuje prema prvoj decimali, od drugoga prema drugoj itd. Definiranoga broja n nema u tablici, tj. ne može se prebrajanjem doći do njega:

$$\begin{array}{lllll}
0, & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots \\
0, & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots \\
0, & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

Napomenimo da se brojevi u tablici zapisuju tako da nema nijedne znamenke iza koje slijede same nule, nego se umjesto $0,1000\ldots$ piše $0,0999\ldots$ itd. (jer razlika između $0,1$ i $0,0999\ldots$ konvergira nuli: $0,01; 0,001; 0,0001; \ldots$) – dakle se radi samo o beskonačnim decimalnim razlomcima. Broj je n definiran tako da se dijagonalno umjesto $a_{i,i}$ stavlja znamenka koja nije ni $a_{i,i}$ ni 0. Stoga se n razlikuje od prvoga broja po tome što umjesto $a_{1,1}$ ima bilo koju znamenku koja nije ni $a_{1,1}$ ni 0; od drugoga broja po tome što umjesto umjesto $a_{2,2}$ ima bilo koju znamenku koja nije ni $a_{2,2}$ ni 0; itd. n se stoga razlikuje od svakoga broja u tablici.

Do pojma neprebrojivosti dolazimo i preko pojma *partitivnoga* (potencijskoga) skupa. Partitivni skup skupa S, $\wp S$, jest skup svih podskupova skupa S (uvijek uključuje i prazan skup). Prema *Cantorovu poučku* (1891.), vrijedi sljedeće:

> kardinalni broj skupa S strogo je manji od kardinalnoga broja partitivnoga skupa skupa S, $|S| < |\wp S|$

Dokaz

1) $|S| \leq |\wp S|$, jer ima funkcija jedan za jedan (injektivna) za koju svaki član $s_i \in S$ ima kao svoju sliku jednočlani skup $\{s_i\} \in \wp S$.

2) Dijagonalnim se postupkom dokazuje da $|S| \neq |\wp S|$. Neka $|S| = |\wp S|$. Tada opstoji odgovaranje jedan za jedan tako da svakomu $s_i \in S$ odgovara neki $p_i \in \wp S$. Neka je p^* skup svih članova skupa S koji nisu članovi svojih pridruženih članova skupa $\wp S$. I skup p^* treba odgovarati nekomu s^*. No, je li $s^* \in p^*$. To nas pitanje vodi u protuslovlje. Stoga ne stoji da $|S| = |\wp S|$

Iz 1) i 2) zajedno slijedi poučak. $\dashv$

Partitivni skup skupa S ima "veličinu" $2^{|S|}$ jer svaki član skupa S može ali ne mora biti u podskupu određenoga skupa S. Stoga, kako je kardinalni broj skupa $\mathbb{Z}^+$ $\aleph_0$, partitivni skup skupa $\mathbb{Z}^+$ ima kardinalni broj $2^{\aleph_0}$. No, prema Cantorovu poučku, $2^{\aleph_0}$ strogo je veće od $\aleph_0$.

Može se dokazati da $|\mathbb{R}| = c = 2^{\aleph_0}$.[3] Prema Cantorovoj hipotezi kontinuuma (1878.), nema kardinalnoga broja između $\aleph_0$ i $\mathfrak{c}$, u skladu s čime bi vrijedilo da je $2^{\aleph_0}$ idući kardinalni broj nakon $\aleph_0$, tj. $\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$ (jer $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$).

Predmetno područje u modelu prvoga reda, dakle može biti konačno, prebrojivo ili neprebrojivo.

Pogledajmo sada *koliko* ima mogućih *izraza* u jeziku logike prvoga reda. Polazimo od broja osnovnih simbola u rječniku, a to je prebrojivo mnogo (zbog indeksiranja simbola). Ako duljinu izraza mjerimo brojem pojavaka osnovnih simbola, onda izraza duljine 1 ima prebrojivo mnogo, izraza duljine 2 prebrojivo $\times$ prebrojivo mnogo, itd.:

skup izraza duljine 1: kardinalni broj $\aleph_0$,
skup izraza duljine 2: kardinalni broj $\aleph_0^2$,
skup izraza duljine 3: kardinalni broj $\aleph_0^3$,
$\vdots$

[3]To se dokazuje

- pomoću svojstva realnih brojeva da se svaki realan broj može injektivno (jedan za jedan) preslikati u podskup racionalnih brojeva manjih od njega (pa je $c \leq 2^{\aleph_0}$),
- te pomoću svojstva da se svaki podskup skupa $\mathbb{Z}^+$ može injektivno preslikati u realan broj s decimalnim znamenkama samo 0 i 1 unutar zatvorenoga intervala $[0, 1]$ (pa je $2^{\aleph_0} \leq c$) (pritom se svakomu n-tomu pozitivnomu cijelomu broju ako je član podskupa, pridružuje 1 kao n-ta decimalna znamenka, inače 0).

skup izraza duljine n: kardinalni broj $\aleph_0^n$.

Međutim $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ – kao što prebrojivo mnogo brojnika s prebrojivo mnogo nazivnika daje također prebrojivo mnogo razlomaka. Kako konačnim brojem opetovanja množenja $\aleph_0$ s $\aleph_0$ ne izlazimo iz prebrojivosti, slijedi da izraza u jeziku prvoga reda svake duljine n ima prebrojivo mnogo. A kako duljina također ima prebrojivo mnogo, slijedi da izraza ukupno ima ponovno $\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$. Uočimo da već samih jednostavnih formula ima prebrojivo mnogo (npr. nakon prebrojivo mnogo jednomjesnih priročnih simbola može se javiti prebrojivo mnogo predmetnih oznaka). Stoga i formula jezika logike prvoga reda ima prebrojivo mnogo. Prema tome *skupova formula* (partitivni skup prebrojivoga skupa) ima neprebrojivo mnogo, no *konačnih skupova formula* ponovno ima prebrojivo mnogo, jer jedan konačan skup formula možemo, prema obziru na duljinu, promotrati kao jedan (konačan) izraz.

5.2 Löwenheim-Skolemov poučak

Nakon što smo definirali moguće veličine predmetnoga područja kao i veličinu skupa svih formula, prelazimo na dva ključna poučka koji se odnose na te veličine. Najprije govorimo o logici prvoga reda bez istovjetnosti i njezinom jeziku $\mathscr{L}_p$.

POUČAK 5.1 (LÖWENHEIMOV POUČAK) *Ako je iskaz p jezika $\mathscr{L}_p$ zadovoljiv, zadovoljiv je nekim modelom s prebrojivim predmetnim područjem.*

POUČAK 5.2 (LÖWENHEIM-SKOLEMOV POUČAK) *Ako je skup Γ iskaza jezika $\mathscr{L}_p$ zadovoljiv, zadovoljiv je nekim modelom s prebrojivim predmetnim područjem.*

Dokaz

- Neka je Γ zadovoljiv,
- dakle Γ je suvisao (stavak 3.1),
- dakle Γ je zadovoljiv inačicom $\mathfrak{M}^{\text{kan}'}$ kanonskoga modela $\mathfrak{M}^{\text{kan}}$ za Γ^P (gdje su svi pokazatelji na konstantama parni), pri čem za svaku konstantu c_i koja se javlja u Γ, $\mathscr{I}^{\text{kan}'}(c_i) = \mathscr{I}^{\text{kan}}(c_{2i})$,
- dakle Γ je zadovoljiv u modelu s prebrojivim skupom predmetnih konstanata kao predmetnim područjem (poučak o potpunosti).

dakle ako je Γ zadovoljiv, Γ je zadovoljiv modelom s prebrojivim predmetnim područjem. ⊣

Löwenheimov i Löwenheim-Skolemov poučak, kako smo ih formulirali, **ne** stoje za priročnu logiku s **istovjetnošću**. Naime, predmetno područje u kanonskome modelu može biti samo jedan predmet. Tako je npr. iskaz

$$\forall x\, x = c$$

istinit samo u modelu s jednočlanim predmetnim područjem. No, za logiku prvoga reda s istovjetnošću i njezin jezik $\mathscr{L}_{p=}$ vrijede preformulacije Löwenheimova i Löwenheim-Skolemova poučka, tako da umjesto riječi "prebrojiv" stavimo "izbrojiv" (zašto?):

POUČAK 5.3 (LÖWENHEIM-SKOLEMOV POUČAK ZA LOGIKU PRVOGA REDA S =) *Ako je skup* Γ *iskaz jezika* $\mathscr{L}_{p=}$ *zadovoljiv, zadovoljiv je nekim modelom s izbrojivim predmetnim područjem.*

Napokon, spomenimo da se može dokazati i tzv. **uzlazni** Löwenheim-Skolemov poučak za logiku prvoga reda s istovjetnošću, prema kojem je skup iskaza koji je zadovoljiv modelom s prebrojivim predmetnim područjem, zadovoljiv modelom s neprebrojivim predmetnim područjem. U svrhu dokaza, definira se model s neprebrojivim predmetnim područjem kao nadskupom prebrojivoga, s time da se zajednički članovi predmetnih područja u relacijama modela ponašaju jednako, a svi novi članovi neprebrojivoga predmetnoga područja kao određeni izabrani član prebrojivoga. – U razlici prema uzlaznome, sam Löwenheim-Skolemov poučak zovemo i **silaznim** Löwenheim-Skolemovim poučkom.

5.3 Kompaktnost

POUČAK 5.4 (POUČAK O KOMPAKTNOSTI) *Ako je svaki konačan podskup* Γ *skupa* Δ *zadovoljiv,* Δ *je zadovoljiv.*

Dokaz

- Neka je Δ nezadovoljiv,
- dakle Δ je nesuvisao (stavak 4.8),
- dakle ima neki konačan nesuvisao podskup Γ od Δ (poopćena def. 8.14 dokaza),
- dakle ima neki konačan nezadovoljiv podskup Γ od Δ (stavak 3.1),

dakle ako je Δ nezadovoljiv, ima neki njegov konačan nezadovoljiv podskup Γ,
dakle ako je svaki končan podskup Γ zadovoljiv, Δ je zadovoljiv. $\dashv$

Kompaktnost logike prvoga reda znači da se problem nezadovoljivosti beskonačnoga skupa iskaza (a taj je skup uvijek prebrojiv) svodi na problem nezadovoljivosti nekoga konačnoga skupa iskaza, a problem nezadovoljivosti za neprebrojivo mnogo skupova iskaza, na problem nezadovoljivosti za prebrojivo mnogo (konačnih) skupova iskaza.

KOROLARIJ 5.1 *Ako* $\Delta \models p$*, onda za neki konačan* $\Gamma \subseteq \Delta$*,* $\Gamma \models p$*.*

Dokaz V. vježbu 1 na str. 52 ⊣

Korolarij dodatno objašnjava što to znači da je deduktivni sustav prvoga reda potpun, iako svaki dokaz u tom sustavu ima konačan broj pretpostavaka.

5.4 Zadatci

1. Dokažite korolarij 5.1 na str. 52 pomoću poučka 5.4, o kompaktnosti.

2. Navedite sve članove partitivnoga skupa skupa $\{a, b, \{c\}\}$!

3. Koliko ima dokaza (u logici prvoga reda) duljine 1?

4. Koliko ima mogućih dokaza duljine 2? Možete li poopćiti odgovor za dokaze bilo koje duljine n?

5. Koliko, dakle ukupno ima dokaza u logici prvoga reda?

6. Ima li u logici prvoga reda formula koji su zadovoljive samo prebrojivim, ali ne i neprebrojivim modelom? Ima li, obratno, u logici prvoga reda formula koje su zadovoljive samo neprebrojivim, ali ne i prebrojivim modelom?

7. Objasnite kako je moguće da je deduktivni sustav logike prvoga reda potpun, iako svaki dokaz polazi od konačno mnogo pretpostavaka, dok Γ takav da $\Gamma \vdash p$ može biti i beskonačan?

Dio II

NEPOTPUNOST

Poglavlje 6

Nepotpunost sustava i nedefinirljivost istine

6.1 Istinitost i dokažljivost

Usporedimo dvije po obliku slične rečenice običnoga, neformaliziranoga jezika. Jedna (paradoks "Lažljivca") govori o istinitosti , a druga o dokažljivosti, obje na niječan način.

$$\text{Ova rečenica nije istinita.} \tag{6.1}$$

Pretpostavimo da je rečenica 6.1istinita. Tada je istinito ono što ona kaže, a to je da sama nije istinita. Dakle, ako je 6.1 istinito, onda 6.1 nije istinito. Pretpostavimo sada da 6.1 nije istinito. No 6.1 upravo to i kaže, dakle odgovara stvarnomu stanju. Prema tome je 6.1 istinito. Dakle, ako je 6.1 istinito, onda 6.1 upravo nije istinito. To je paradoks 'Lažljivca', prema kojem 6.1 niti jest niti nije istinito, iako bi trebalo biti jedno od toga dvojega (ako svaka rečnica treba biti bilo istinita, bilo neistinita).[1]

Evo sada slične rečenice (koja neformalno uvodi u Gödelov poučak o nepotpunosti), samo što umjesto o istinitosti govori o dokažljivosti:

$$\text{Ova rečenica nije dokažljiva.} \tag{6.2}$$

Pretpostavimo da je 6.2 dokažljivo. To znači da je dokažljivo da 6.2 nije dokažljivo, što protuslovi pretpostavci (da je 6.2 dokažljivo), pa prema tome moramo odbaciti

[1]Paradoks "Lažljivca" pripisuje se Eubulidu, filozofu četvrtoga stoljeća prije Krista. Postoji i starija, nešto drukčija formulacija, koja se pripisuje Epimenidu (jednomu od sedam grčkih mudraca, oko 600. prije Krista): "Jedan Krećanin kaže: svi Krećani lažu", koja nije pravi paradoks. Analizirajte zašto!

pretpostavku, ukoliko je naša metoda dokazivanja suvisla (neprotuslovna). Pretpostavimo pak da 6.2 nije dokažljivo. To upravo potvrđuje ono što 6.2 i kaže, a to je da 6.2 nije dokažljivo. Preostaje dakle samo da 6.2 nije dokažljivo, i da je prema tome istinito, jer upravo tvrdi o sebi da nije dokažljivo.

Promotrimo i nijek rečenica 6.1 i 6.2.

'Nije tako da je ova rečnica neistinita' trebala bi biti i istinita i ujedno neistinita. Vidjeli smo, naime da rečenica 6.1 ne može biti ni istinita ni neistinita. No ako nije istinita, njezin je nijek neistinit, a ako nije neistinita, njezin je nijek istinit. Međutim, prema klasičnome logičkome zakonu o neprotuslovlju, nijedna rečenica ne može biti i istinita i neistinita.

Nijek rečenice 6.2, dakle rečenica 'Nije tako da ova rečenica nije dokažljiva', također nije dokažljiva (kao ni 6.2). Jer ako pretpostavimo da je dokažljiva, a 6.2 iskazuje vlastitu nedokažljivosr, onda nijek rečenice 6.2 iskazuje dokažljivost rečenice 6.2, što, kako smo vidjeli, vodi protuslovlju. Pritom pretpostavljamo da se dokazivanje provodi u nekome suvislome sustavu (koji ne može dovesti do protuslovlja) – no poslije ćemo se, u točnijoj analizi, još vratiti na pojam suvislosti dokaznoga sustava.

Paradoks Lažljivca pokazuje da je jezik koji sadrži i jedinstveni prirok (pojam) istinitosti rečenica toga jezika, antinomičan, u smislu kršenja klasičnoga logičkoga zakona o istinitosti u skladu s kojim bi svaka rečenica trebala biti bilo istinita, bilo neistinita, i ne oboje. Stoga smo i uveli poseban formalizirani jezik za logiku prvoga reda, koji ne sadrži prirok istinitosti rečenica toga jezika, nego je taj prirok uveden kao semantički prirok, pripadan metajeziku i metateoriji **o** logici prvoga reda.

U jezik logike prvoga reda nije bio uveden ni prirok dokažljivosti prvoga reda, nego također samo kao (meta)teorijski, ali sintaktički prirok. Na temelju gornjega neformalnoga primjera, čini se da taj prirok, ako je sastavni dio istoga jezika na rečenice kojega se i odnosi, nije antinomičan, ali da vodi određenomu obliku nepotpunosti – postojanju istinitih, ali nedokažljivih iskaza.

U ovome ćemo poglavlju pokazati kako se logika prvoga reda može proširiti tako da u sebi uključuje prirok dokažljivosti vlastitih rečenica i uopće sintaktičku metateoriju vlastitoga jezika i dedukcije, te kako uslijed toga takva logika postaje nepotpunom (ne samo u jednom smislu). No pokazat ćemo, za razliku, da ni tako proširena logika prvoga reda ne može uključivati svoju semantiku s njezinim temeljnim pojmom istine.

Logika prvoga reda koja može zaključivati o vlastitu jeziku i sustavu (i u tom smislu biti svojevrsnom logikom logike), jest elementarna aritmetika kao posebna primijenjena logika prvoga reda.

6.2 Aritmetika kao logika

U razmatranju elementarne aritmetike kao primijenjene logike, zanimat će nas ponajprije odnos temeljnih logičkih pojmova istinitosti i dokažljivosti, semantike i sintakse, te neka bitna svojstva samoga deduktivnoga sustava. Pri tom će nam biti potrebno samo osnovno aritmetičko znanje koje se temelji na zbrajanju i množenju prirodnih brojeva.

U središtu će nam zanimanja biti čuveni Gödelov poučak o nepotpunosti,[2] prema kojem u bilo kojem sustavu aritmetike prvoga reda, ako je u jednom posebnom smislu suvisao (vidjet ćemo o kakvoj se suvislosti radi), ima iskaza takvih da ne možemo dokazati ni njih ni njihov nijek. Takvi se iskazi nazivlju **neodlučljivima**. Za sustav (teoriju) u kojem se javljaju neodlučljivi iskazi, kažemo da je sintaktički nepotpun. No pokazat ćemo da je taj sustav nepotpun i u semantičkome smislu, upravo u onom u kojem smo za opću logiku prvoga reda dokazali da je potpuna.

Također, i u uskoj povezanosti s poučkom o nepotpunosti, zadržat ćemo se i na Tarskievu poučku o nedefinirljivosti istine,[3] prema kojem se pojam aritmetičke istine ne može definirati unutar same aritmetike (kao posebne logike prvoga reda).

Jezik aritmetike prvoga reda (kao posebne logike prvoga reda) svest ćemo na aritmetičke simbole, formule i iskaze, a njezinu **semantiku** na jedan jedini, aritmetički model, koji se osniva na skupu prirodnih brojeva, tako da rečenice neće imati drugo doslovno značenje osim aritmetičkoga. To, nadalje, znači da će aritmetička istina biti isto što i valjanost.

Time ne isključujemo opstojnost i drugih modela. Strukturalno istovjetne (izomorfne) modele, u kojima vrijede sve relacije kao u modelu prirodnih brojeva, nazivljemo **standardnim** modelima aritmetike (prvoga reda).[4] Zbog izomorfizma svi se oni ponašaju jednako, te je stoga dovoljno govoriti o jednome standardnome modelu – modelu samih prirodnih brojeva. Ostali modeli, koji nisu izomorfni modelu prirodnih brojeva, nazivlju se **nestandardnima**. Primjerice, polazeći od kompaktnosti te zaključujući na zadovoljivost beskonačnoga skupa (standardnoj aritmetici pridodanih) aksioma oblika $c > n$ za svaki prirodan broj n, dolazimo do aritmetičkoga modela koji sadrži i nestandardni broj c, veći od svakoga prirodnoga broja (v. i napomenu na kraju ovoga odjeljka). –

[2] Kurt Gödel (1906.-1978.) je dokazao taj poučak u radu ‘O formalno neodlučljivim stavcima *Principia mathematica* i srodnih sustava, I’, objavljenome 1931. godine (v. hrvatski prijevod V. Kirina u dodatku knjige Nagel, E.; Newman, J., *Gödelov dokaz*, Zagreb: Kruzak, 2001., str. 87-117).

[3] Alfred Tarski je taj poučak dokazao u svom radu ‘Pojam istine u formaliziranim jezicima’ (1935).

[4] Modelu prvoga reda $\mathfrak{M}$ **izomorfan** je model $\mathfrak{M}'$ ako i samo ako postoji bijekcija f s domene D na domenu D′, pri čem za svaku relaciju R nad D i R′ nad D′ vrijedi: $\mathrm{R}(\mathrm{d}_1, \ldots, \mathrm{d}_n)$ ako i samo ako $\mathrm{R}'(\mathrm{d}'_1, \ldots, \mathrm{d}'_n)$.

Kažemo da je skup iskaza (primjerice, aksioma) istinitih samo u modelima koji su svi izomorfni, **kategoričan.**. U tom smislu i za čitavu logiku ili teoriju uopće možemo reći da jest ili nije kategorična. Tako npr. opća logika prvoga reda nije kategorična, jer su njezini valjani iskazi istiniti kako na konačnom, tako i na beskonačnom predmetnom području (domeni), dakle u modelima koji nisu izomorfni.

Nadalje, **deduktivni sustav** logike prvoga reda proširit ćemo posebnim, upravo aritmetičkim aksiomima, na koje ćemo se moći pozvati bilo gdje u dokazu, bez ikakvih daljnjih opravdanja. Možemo ih shvatiti kao stalnu zalihu pretpostavaka svakoga aritmetičkoga dokaza, koja je ugrađena u sam sustav. U tom se smislu aritmetički poučci svode na dokažljivost iz aritmetičkoga sustava (s uključenim specifičnim aritmetičkim aksiomima), bez dodatnih pretpostavaka.

Aritmetički bi sustav (aritmetički aksiomi zajedno s općim deduktivnim pravilima) bio formalno (sintaktički) potpun ("pokrio" bi cijelu elementarnu aritmetiku) kad bi se u tom sustavu svaki aritmetički iskaz mogao dokazati ili opovrći, no vidjet ćemo da to nije slučaj. Također, kad bi sustav bio semantički potpun, aritmetička bi istina točno odgovarala aritmetičkim poučcima, no vidjet ćemo da ni to nije slučaj.

Dokaz poučka o nepotpunosti (sintaktičnoj i semantičkoj) dug je i vrlo složen, te ćemo ga prikazati samo u osnovnim crtama.[5] Prikazat ćemo

- kako jezik i sustav logike prvoga reda možemo pretvoriti u aritmetički jezik i sustav;
- kako se sintaktična (dakle metamatematička) svojstva mogu izraziti aritmetički;
- kako se u dobivenome aritmetičkome jeziku može izgraditi iskaz (G) koji sam o sebi tvrdi da je nedokažljiv;
- da je i pod kojim uvjetom G u aritmetičkome sustavu neodlučljiv;
- da je G istinit (u standardnome aritmetičkome modelu).

Ako je G neodlučljivo, dakle nije poučak, primijetimo da je sa stajališta opće logike prvoga reda, koja je potpuna, očito da će onda biti i drugih, *nestandardnih* aritmetičkih modela, u kojima je G neistinito.

[5] Jedna se rekonstrukcija može naći u knjizi Nagel, E.; Newman, J. (prijevod Maje Hudoletnjak Grgić), *Gödelov dokaz*, kao i, primjerice, u K. Podnieksa (`http://www.ltn.lv/~podnieks/gt.html#contents`).

Nakon toga ćemo dodati i nekoliko napomena o tzv. drugome Gödelovu dokazu nepotpunosti.

Na temelju svega neće biti komplicirano razumjeti i dokazati i Tarskiev poučak o nedefinirljivosti istine.

6.3 Primjena logike prvoga reda na aritmetiku

U rječniku aritmetičkoga jezika, $\mathscr{A}$, zadržavamo samo sljedeće **logičke** i **pomoćne** simbole:

$$\begin{array}{lllll} x & y & z & x_1 & \dots \\ \neg & \vee & \forall & & \\ = & & & & \\ (&) & & & \end{array}$$

Ostali su logički simboli definirani, i kad ih u nastavku budemo rabili, bit će to samo kao **pokrate**:

$$\begin{array}{lll} p \wedge q & \text{umjesto} & \neg(\neg p \vee \neg q) \\ p \to q & \text{umjesto} & \neg p \vee q \\ \exists x\, p & \text{umjesto} & \neg \forall x \neg p \end{array}$$

Od **opisnih** se simbola u jeziku $\mathscr{A}$ javljaju sljedeći:

0	:	broj nula (predmetna konstanta)
$'$	:	(neposredni) sljedbenik
$+$	:	zbrajanje
$\times$	:	množenje

'0' je jedina **predmetna konstanta**, '$'$' je jednomjesni **funkcijski** simbol, a '+' i '$\times$' su dvomjesni funkcijski simboli. Neformalno ćemo kao pokrate rabiti i druge aritmetičke simbole, koji se svi dadu zamijeniti osnovnima. **Predmetne** su **oznake**, prema tome, 0 i oznake tvorene na osnovi nule pomoću funkcijskih oznaka, primjerice $0'$, $0''$, $0'''$, ... (koje ćemo često kraće i neformalno zapisati kao $1, 2, 3, \dots$), zatim $0'' + 0'$, $(3 + 4) \times 2$ itd.

Formule tvorimo na uobičajen način logike prvoga reda (istovjetnosna formula, nijek, disjunkcija i opća formula). I tu se rabe uobičajene pokrate, npr.:

$x < y$ umjesto $\exists z\; x + z' = y$.

U semantici, u smislu kako smo već spomenuli, rabimo samo jedan model – aritmetički (ili bilo koji izomorfni), gdje je predmetno područje skup prirodnih brojeva (uključujući 0), s uobičajenim i dobro poznatim značenjima aritmetičkih i logičkih izraza (kako smo ih već neformalno i naveli u popisu simbola).

U aritmetičkome deduktivnome sustavu na poznata dokazna pravila dodajemo sljedeće, specifično aritmetičke aksiome:

A1 $\forall x \neg x' = 0$
A2 $\forall x \forall y\, (x' = y' \rightarrow x = y)$
A3 $\forall x\, x + 0 = x$
A4 $\forall x \forall y\, x + y' = (x + y)'$
A5 $\forall x\, x \times 0 = 0$
A6 $\forall x \forall y\, x \times y' = x \times y + x$
AS $(p(0) \land \forall x(p(x) \rightarrow p(x'))) \rightarrow \forall x p(x)$

AS je induktivna aksiomatska shema, tj. opći oblik koji podrazumijeva beskonačno mnogo aksioma koji imaju taj oblik. Takav sustav zovemo zovemo Peanovom aritmetikom prvoga reda, **PA**.[6]

Primijetimo da A1 izražuje nesurjektivnost funckije $'$, a A2 njezinu injektivnost, čime je izražena beskonačnost. AS pak iskazuje izbrojivost i omogućuje zaključivanje matematičkom indukcijom. A1, A2 i AS zajedno, prema tome, izražuju prebrojivost (skup je prirodnih brojeva prebrojiv). Nadalje, kako je očito, A3 i A4 definiraju zbrajanje, a A5 i A6 množenje.

6.4 Sintaksa izražena aritmetički

Pretpostavka je izgradnje iskaza G, koji o sebi tvrdi da je nedokažljiv iz aritmetičkih aksioma, da u aritmetici imamo mogućnosti govoriti o samim aritmetičkim iskazima i njihovim sintaktičnim svojstvima (kao što je dokažljivost). Drugim riječima, potrebno je moći metateoriju aritmetike (“metamatematiku”) izraziti aritmetički. Gödel je iznašao zanimljiv način kako to učiniti. Najprije svakomu simbolu aritmetike prvoga reda pridružimo neki prirodan broj, koji nazivljemo **Gödelovim brojem** toga simbola. Evo tablice pridruživanja brojeva simbolima:

0	$'$	$+$	$\times$	$=$	$\neg$	$\lor$	$\forall$	(	)	x	y	z	x_1	...
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	13	17	19	...

[6] Giuseppe Peano (1858.–1932.), talijanski matematičar i logičar; zaslužan je, uz njemačkoga matematičara Richarda Dedekinda (1831.–1916.), za aksiomatizaciju teorije prirodnih brojeva.

Gödel ima unekoliko drukčije pridruživanje, zbog druge inačice logičko-matematičkoga sustava u kojem provodi dokaz, a mi smo upotrijebili Nagel–Newmanovo pridruživanje.

Nadalje, kad je riječ o izrazu, svakomu simbolu koji se javlja na prvome mjestu u izrazu, pridružujemo prvi prost broj (2) potenciran Gödelovim brojem toga simbola; drugomu simbolu drugi prost broj (3) potenciran brojem drugoga simbola itd. Slično vrijedi i za svaki niz formula (primjerice, dokaz je niz formula): prvoj se formuli pridružuje prvi prost broj potenciran Gödelovim brojem te formule, drugoj drugi prost broj potenciran Gödelovim brojem druge formule itd.

Svaka aritmetička formula i svaki niz formula mogu dobiti svoj Gödelov broj, i to na način kao u sljedećem primjeru: formula

$$x = 0$$

ima Gödelov broj

$$2^{11} \times 3^5 \times 5^1.$$

Dakle, prvi prost broj (za prvi simbol u formuli) potenciramo brojem prvoga simbola, to množimo s drugim prostim brojem potenciranim brojem drugoga simbola, što zatim množimo trećim prostim brojem potenciranim brojem trećega simbola (itd. ako je formula dulja). Analogno se obrojčava i niz formula. Npr. niz formula

$$x = 0,\ y = 0$$

ima Gödelov broj

$$2^{2^{11}\times 3^5 \times 5^1} \times 3^{2^{13}\times 3^5 \times 5^1}$$

Kako je dokaz upravo niz formula u kojem je zadnja formula dokazana postavka, tako i svaki dokaz može imati svoj Gödelov broj. Pritom, za ilustraciju, ako je riječ o naravnoj dedukciji, dokazne crte možemo izostaviti, a format izvoda iz pretpostavke (s poddokaznom crtom) zamijeniti odgovarajućim pogodbama kao u sljedećem primjeru:[7]

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \quad r \\ \quad s \end{array}$$

[7] Sam se Gödelov deduktivni sustav sastoji isključivo od aksioma i aksiomatskih shema te pravila modus ponens, koje omogućuje izvođenje novoga retka iz prethodnih (aksiomatski sustav).

možemo zamijeniti sljedećim nizom:

$$p \to q, (p \land r) \to s.$$

Sada se može definirati svojevrsni "kodni sustav" takav da se tvrdnjama o **aritmetičkim relacijama** (uključujući i svojstva) između brojeva na "šifriran" način iskazuju **sintaktičke relacije** (uključujući i svojstva) između jezičnih oblika, kao primjerice to da je neki izraz formula, da je neka formula aksiom, da neki niz formula dokazuje neku formulu itd. Nizom međusobno povezanih definicija jednoznačno se povezuju sintaktičke i aritmetičke relacije tako da vrijedi sljedeće:

$$Ma_1 \dots a_n \text{ ako i samo ako } Ax_1 \dots x_n, \tag{6.3}$$

pri čem je M sintaktička relacija (svojstvo ili odnos) između sintaktičkih predmeta $a_1, \dots, a_n$, A odgovarajuća aritmetička relacija, a x_i Gödelov broj sintaktičkoga predmeta a_i (Gödel daje 46 takvih definicija). Na temelju toga odgovaranja, sintaktične se (metajezične) rečenice mogu jednoznačno prevesti u aritmetički jezik (odnosno, aritmetički kodirati).

Kažemo da su sve definirane aritmetičke relacije, osim jednomjesne DOK^1, kojom se prevodi dokažljivost, izračunljive i **odlučljive** jer se odluka (odgovor) o pitanju o njihovoj zadovoljenosti (uređenom n-torkom brojeva) može izračunati kao primitivna rekurzivna funkcija. – Ugrubo rečeno, primitivna rekurzivna funkcija konačan je niz primjena osnovnih aritmetičkih funkcija – to su nul-funkcija ($f(x) = 0$), sljedbenička ($x' = x + 1$) i istovjetnosna funkcija (npr. $id(x) = x$) –, zatim primjenâ supstitucije primitivnih rekurzivnih funkcija za varijable i, napokon, primjena primitivne rekurzije na same primitivne rekurzivne funkcije. Primjer se primjene primitivne rekurzije nalazi u gore navedenim Peanovim aksiomima A4-A5, kojima se definira zbrajanje, i u aksiomima A6-A7, kojima se definira množenje.

Nadalje, sve su primitivne rekurzivne aritmetičke relacije povezane s (nerekurzivnom) aritmetičkom relacijom DOK^1, koja je aritmetički prijevod (kod) za sintaktičku relaciju aritmetičke dokažljivosti (**PA** $\vdash$), i to na sljedeći način:

$$\begin{cases} \text{ako } Rx_1 \dots x_n, \text{ onda } DOK(\ulcorner Rx_1 \dots x_n \urcorner) \\ \text{ako } \neg Rx_1 \dots x_n, \text{ onda } DOK(\ulcorner \neg Rx_1 \dots x_n \urcorner) \end{cases} \tag{6.4}$$

gdje je $\ulcorner Rx_1 \dots x_n \urcorner$ Gödelov broj rečenice $Rx_1 \dots x_n$ izražene aritmetičkim jezikom $\mathscr{A}$, a R rekurzivna relacija (za sve je vrijednosti varijabla $x_1, \dots, x_n$ izračunljivo stoje ili ne u relaciji R). Sama nerekurzivna relacija DOK^1 definira se pomoću opstojnosti i rekurzivne relacije D^2, koja je aritmetički prijevod sintaktične relacije "dokazuje" ("x dokazuje/jest dokaz za y"):

$$DOK(y) \leftrightarrow_{def} \exists x D(x, y).$$

6.5 Aritmetički iskaz o vlastitoj nedokažljivosti

Prijeđimo sada na izgradnju aritmetičkoga iskaza koji osim što ima čisto aritmetički sadržaj, ujedno treba biti i aritmetički prijevod sintaktičke (metajezične) rečenice "Ova rečenica nije dokažljiva" (v. Uvod u ovo poglavlje). Taj se iskaz uobičajeno kraće označuje s 'G' (prema Gödelovu prezimenu).

Polazimo od formule

$$\forall x \neg D(x, y) \tag{6.5}$$

Formula 6.5, prema tome kaže da nijedan broj x nije broj dokaza za izraz s brojem y, tj. da izraz s brojem y nije dokažljiv.

Sada je potrebno formulu 6.5 tako preoblikovati da upravo o sebi kaže da nije dokažljiva. U tu se svrhu služimo tromjesnim funkcijskim simbolom sb^3 koji je aritmetički prijevod za sintaktički postupak supstitucije 1) u određenu formulu, 2) određenoga izraza, 3) za određenu varijablu. Konkretno, potrebna nam je funkcijska predmetna oznaka

$$sb(y, y, 13)$$

koja označuje broj formule koja se dobije supstitucijom

1. u formulu s brojem y,
2. izraza broja y,
3. za varijablu s brojem 13 (a to je upravo varijabla 'y').

Uvrstimo tu funkcijsku oznaku u 6.5. Dobivamo

$$\forall x \neg D(x, sb(y, y, 13)). \tag{6.6}$$

Neka ta formula ima Gödelov broj g. Supstitucijom g/y dobivamo iskaz:

$$\forall x \neg D(x, sb(g, g, 13)). \tag{6.7}$$

Oznaka $sb(g, g, 13)$ broj je formule 6.7, jer je ona dobivena upravo supstitucijom

1. u formulu s brojem g (to je formula 6.6),
2. izraza "g" broja g,
3. za varijablu s brojem 13 (varijabla 'y').

Stoga je iskaz $\forall x \neg D(x, sb(g, g, 13))$ aritmetički prijevod sintaktičke rečenice 'Ova rečenica nije dokažljiva', tj. to je traženi aritmetički iskaz G, a njegov je Gödelov broj $sb(g, g, 13)$. G je prema tome u aritmetici istovrijedan tvrdnji o nedokažljivosti samoga G:

$$\mathbf{PA} \vdash G \leftrightarrow \neg \exists x D(x, \ulcorner G \urcorner) \tag{6.8}$$

to jest, služeći se Gödelovim brojem za G, $\mathbf{PA} \vdash G \leftrightarrow \neg \exists x D(x, sb(g, g, 13))$.

6.6 Neodlučljivost iskaza G

Sada ćemo pokazati da G, ali ni $\neg G$, nisu dokažljivi u **PA**, i to pod određenim uvjetom suvislosti aritmetičkoga sustava (**PA**). Općenito, ako p ni $\neg p$ nisu dokažljivi, kažemo da je p **neodlučljiv**, a sustav u kojem je p neodljučljiv kažemo da je **sintaktički nepotpun**.[8]

6.6.1 Nedokažljivost G

Pretpostavimo, najprije, da je G dokažljivo u **PA**, što zapisujemo ovako:

$$\mathbf{PA} \vdash G$$

Slijedi da ima neki broj x koji "dokazuje" broj $\ulcorner G \urcorner$, pri čem je "dokazivanje" rekurzivna aritmetička relacija koja odgovara sintaktičnoj relaciji dokazivanja. Rekli smo prije (6.4) da je svaka rekurzivana aritmetička relacija dokažljiva u **PA**, pa prema tome

$$\mathbf{PA} \vdash \exists x D(x, \ulcorner G \urcorner)$$

Međutim, prema 6.8, $\exists x D(x, \ulcorner G \urcorner)$ istovrijedno je s $\neg G$. Stoga možemo pisati:

$$\mathbf{PA} \vdash \neg G$$

Dobili smo protuslovlje – ako je u PA dokažljivo G, onda je dokažljivo i $\neg G$. Prema tome:

[8]Poučci (zajedno s aksiomima) suvisloga i sintaktički potpunoga sustava čine maksimalan suvisao skup iskaza (v. definiciju 4.1).

ako **PA** $\vdash G$, onda je **PA** nesuvisao,

iz čega slijedi:

ako je **PA** suvisao, onda **PA** $\nvdash G$.

6.6.2 Nedokažljivost $\neg G$

Pretpostavimo sada da je u **PA** $\neg G$ dokažljivo:

PA $\vdash \neg G$

Prema 6.8, $\neg G$ je istovrijedno s dokažljivošću G. Stoga možemo pisati:

PA $\vdash \exists x D(x, \ulcorner G \urcorner)$

No pokazano je malo prije da G nije dokažljivo u **PA** (ako je **PA** suvisao sustav). Dokažljivost nije rekurzivna relacija, ali to da je x dokaz za y, jest. U prvome slučaju ne možemo, ali u potonjem možemo primijeniti stavak da je svaka primitivna rekurzivna relacija među brojevima dokažljiva u **PA** (stavak 6.4). Prema tome, koji god broj n_i uzeli, n_i neće biti broj dokaza za G, a zbog dokažljivosti rekurzivnih relacija, imamo:

PA $\vdash \neg D(n_1, \ulcorner G \urcorner)$
PA $\vdash \neg D(n_2, \ulcorner G \urcorner)$
PA $\vdash \neg D(n_3, \ulcorner G \urcorner)$
itd.

Time doduše nismo dobili protuslovlje u **PA**, ali imamo iskaz oblika $\exists xp$ i ujedno nijek svakoga izgrađenoga supstitucijskoga primjera za taj iskaz, dakle iskaze oblika $\neg p(\mathrm{c}_1)$, $\neg p(\mathrm{c}_2)$, $\neg p(\mathrm{c}_3)$ itd., što u beskonačnosti, potencijalno, vodi protuslovlju. Takva se (potencijalna) nesuvislost nazivlje ω-nesuvislošću. Dakle,

ako je **PA** $\vdash \neg G$, onda je **PA** ω-nesuvisao,

što opet daje sljedeći rezultat:

ako je **PA** ω-suvisao, onda **PA** $\nvdash \neg G$.

Inače, kako nam je '$\exists$' samo definirani simbol (nema ga u rječniku aritmetičkoga jezika), **ω-nesuvislost** definiramo pomoću '$\forall$'. Pa možemo reći:

> sustav je S ω-nesuvisao ako i samo ako je u S dokažljiva svaka formula u nizu $p(\mathrm{c}_1), p(\mathrm{c}_2), p(\mathrm{c}_3), \ldots$, i ujedno formula $\neg\forall xp$.

Kao što jednostavnu suvislost definiramo pomoću jednostavne nesuvislosti (v. def. 8.20), tako i ω-suvislost definiramo pomoću ω-nesuvislosti kao polazišnoga pojam: sustav je **ω-suvisao** ako i samo ako nije ω-nesuvisao. Analogne definicije vrijede i općenito za ω-nesuvislost i ω-suvislost (u sustavu S) nekoga *skupa iskaza* Γ.

6.6.3 Neodlučljivost G

Ako je sustav ω-suvisao, također je suvisao i u jednostavnome smislu (nedokažljivost p i $\neg p$ u sustavu). Jer, ako je nesuvisao u jednostavnome smislu, onda je i ω-nesuvisao (tada možemo dokazati bilo koji iskaz). Stoga možemo dokaz ujediniti i reći:

> ako je **PA** ω-suvisao, onda **PA** $\nvdash G$ i **PA** $\nvdash \neg G$.

I upravo taj stavak nazivljemo Gödelovim poučkom o nepotpunosti. Naime, kao što smo rekli, sustav u kojem je neki iskaz neodlučljiv, jest sintaktički nepotpun. Stoga kažemo:

> ako je **PA** ω-suvisao, onda je **PA** sintaktički nepotpun.

Napomenimo da sintaktičnu nepotpunost ne bismo izbjegli ni kada bismo G dodali aritmetičkomu sustavu kao novi aksiom. U tom novome sustavu, nazovimo ga **PA**$'$, G je, doduše, dokažljiv. No u **PA**$'$ ponovno možemo, na sličan način, izgraditi neki iskaz G' koji govori o svojoj nedokažljivosti u **PA**$'$ (ne više u **PA**). Tako možemo ići u beskonačnost.

Zanimljivo je spomenuti i da, ako je **PA** suvisao, onda je **PA** + $\neg G$ suvisao, ali ω-nesuvisao (prema drugome dijelu dokaza).

6.7 Istinitost G

Dosad smo govorili samo o sintaktičnoj nepotpunosti aritmetičkoga sustava. No sustav možemo usporediti i sa semantičkom stranom aritmetike, ispitujući istinitosnu vrijednost iskaza G.

Vidjeli smo da je G u **PA** nedokažljiv ako je PA suvisao. Ali G je ne samo obična aritmetička rečenica nego, kako smo pokazali, i prijevod sintaktičke rečenice koja tvrdi vlastitu nedokažljivost. Prema tome, ako je **PA** suvisao, G je istinit prema svojem sintaktičkome (metateorijskome) smislu. A spomenuli smo da svaka sintaktička relacija R stoji ako i samo ako stoji i aritmetička relacija R' koja je prijevod (aritmetički kod) za R (vidi 6.3). Dakle, pod uvjetom suvislosti **PA**, G je istinit također i u sasvim aritmetičkome smislu. Ali G, kako smo pokazali, nije dokažljiv u **PA** ako je **PA** suvisao. G je dakle primjer aritmetički istinitoga (ujedno i valjanoga), ali u **PA** nedokažljivoga aritmetičkoga iskaza. Stoga možemo reći da je, u odnosu prema aritmetičkoj semantici, aritmetički sustav **PA**, ako je suvisao, **semantički nepotpun**.

6.8 Je li suvislost aritmetičkoga sustava dokažljiva?

Postoji još jedan dokaz sintaktičke nepotpunosti sustava **PA**, koji je Gödel ocrtao kao dodatak prvomu, upravo prikazanomu dokazu. U tom smislu obično se razlikuju Gödelov prvi i drugi dokaz nepotpunosti. U drugome dokazu, umjesto o G, riječ je o rečenici koja iskazuje da je sam sustav **PA** suvisao i koja se također može prevesti na aritmetički jezik $\mathscr{A}$. Suvislost sustava znači da u njem nema i dokaza za p i dokaza za $\neg p$, te prema tome, da u njem nije dokažljiv svaki iskaz. Tvrdnja da u **PA** ima iskaz koji nije dokažljiv, dade se izraziti (kodirati) jezikom **PA** aritmetičkim iskazom koji ćemo skraćeno nazvati iskazom S.

(a) Krenimo od rezultata iz prvoga dokaza nepotpunosti, prema kojem:

ako je **PA** suvisao, onda **PA** $\nvdash G$.

Suvislost **PA** izrazimo pomoću S, a **PA** $\nvdash G$ izrazimo pomoću G (jer je nedokažljivost G metateorijski smisao rečenice G). Možemo pisati:

$$S \to G.$$

Može se pokazati da dokazivanje te tvrdnje u prvome dokazu nepotpunosti ne izlazi iz okvira aritmetike. Stoga vrijedi da je $S \to G$ aritmetički dokažljivo:

PA $\vdash S \to G$.

No sada, ako bi S bilo dokažljivo, dokažljivo bi bilo i G. Ali, ako je **PA** suvisao, G nije dokažljivo, pa prema tome, ako je **PA** suvisao, nije dokažljivo ni S:

ako je **PA** suvisao, onda **PA** $\nvdash S$.

(b) Nadalje, pretpostavku ω-suvislosti iz prvoga dokaza sada zamijenimo (kako to čini Gödel) pretpostavkom da u **PA** $\neg S$ nije dokažljivo. Jasno, trivijalno vrijedi da, ako **PA** $\nvdash \neg S$, onda **PA** $\nvdash \neg S$.

Ujedinjujući (a) i (b), uočimo da, ako **PA** $\nvdash \neg S$, onda je **PA** suvisao (jer ima barem jedan iskaz koji nije dokažljiv). Prema tome, ako **PA** $\nvdash \neg S$, onda **PA** $\nvdash S$ i **PA** $\nvdash \neg S$, te stoga

ako **PA** $\nvdash \neg S$, onda je S neodlučljivo u **PA**.

Tj.

ako **PA** $\nvdash \neg S$, onda je **PA** sintaktički nepotpun.

Sve to ne znači da suvislost sustava **PA** nije ni na koji način dokažljiva, nego samo to da nije dokažljiva u aritmetičkome sustavu prvoga reda **PA**, ni u sustavima koji sadrže **PA**. Suvislost aritmetičkoga sustava dokazao je 1936. godine Gerhard Gentzen u teoriji koja ne uključuje cijelu aritmetiku prvoga reda.

6.9 Nedefinirljivost istine u aritmetici prvoga reda

Za razliku od pojma dokaza i dokažljivosti, pojam se istinitosti ne može definirati u aritmetičkome jeziku prvoga reda. Kad bi se mogao, mogao bi se u aritmetičkome jeziku reproducirati i paradoks Lažljivca. Pretpostavimo da je T^1 prirok koji aritmetički kodira semantičkomi pojam istinitosti. Tada bi se mogla izgraditi aritmetička formula

$$\neg T(sb(y, y, 13))$$

koja sama ima neki Gödelov broj. Uzmimo da je to broj h. Uvrštavanjem, analogno izgradnji G, dobivamo:

$$\neg T(sb(h, h, 13))$$

Taj iskaz tvrdi vlastitu neistinitost, te je istinit ako i samo ako je neistinit, tj. samoprotuslovan je. Uočimo razliku prema G, koji nije samoprotuslovan, nego nedokažljiv. Iz nedokažljivosti G ne slijedi njegova dokažljivost, iako iz njegove dokažljivosti, kako smo vidjeli, doista slijedi njegova nedokažljivost.

6.10 Dodatak o "semantičkim" paradoksima

Navedimo još nekoliko primjera takozvanih "semantičkih" (ili "epistemologijskih") paradoksa, kojima se želi uvesti neki pojam za koji se čini da bi trebao biti prihvatljiv, ali je ipak samoprotuslovan. Ti se paradoksi mogu riješiti razlikovanjem predmetnoga jezika i metajezika (teorije i metateorije), tako da metajezični pojam ne mora pripadati i predmetnomu jeziku.

6.10.1 Richardov paradoks

U Richardovu paradoksu[9] želi se uvesti definicija (u konačnome broju znakova) nekoga decimalnoga broja, koji se razlikuje od svakoga konačnom definicijom definiranoga decimalnoga broja. Zamislimo najprije beskonačan, i to prebrojiv niz svih konačnih definicija decimalnih brojeva.

Napomenimo da je skup svih (konačnih) izraza pomoću hrvatske abecede (30 slova) prebrojiv (shvatimo i rečenice kao nizove slova). Naime, hrvatske izraze možemo u skupinama linearno poredati prema duljini (broj pojavaka slova) na sljedeći način (abecedno unutar svake skupine):

izrazi duljine 1: ima ih 30
izrazi duljine 2: ima ih 30×30
izrazi duljine 3: ima ih $30 \times 30 \times 30$
$\vdots$
izrazi duljine n (n-slova): ima ih 30^n.[10]

Ukupan je broj hrvatskih izraza $30^1 + 30^2 + 30^3 + \ldots$ ($= \sum_n 30^n$). Kako postoji odgovaranje 1–1 (bijekcija) između linearno poredanih hrvatskih izraza i skupa pozitivnih cijelih brojeva (ta su dva skupa jednakobrojni), slijedi da je skup hrvatskih izraza prebrojiv.

Nekih su od hrvatskih izraza defincije brojeva, pa stoga te definicije također možemo poredati u niz (pritom idemo redom po nizu izraza i preskačemo sve one izraze koji ne označuju broj):

definicija 1 : prvi broj
definicija 2 : drugi broj
definicija 3 : treći broj
itd.

Definirajmo sada neki broj N koji kao cijelu znamenku ima 0, a od n-toga se broja s cijelom znamenkom 0 razlikuje prema n-toj znamenci, i to tako da

> ako n-ti broj ima kao n-tu znamenku i koja nije 8 ili 9, onda N ima kao svoju n-tu znamenku $i + 1$, a ako i jest 8 ili 9, onda N ima kao svoju n-tu znamenku 1.[11]

[9] Formulirao ga je Jules Richard 1905. (objavljen 1906.).
[10] Riječ je o broju varijacija s ponavljanjem.
[11] Uvjet prema Fraenkelu i Bar-Hillelu, koji izbjegava poklapanje npr. između 0,1 i 0,09999. . . .

Definicija broja N trebala bi bili u nizu svih konačnih definicija decimalnih brojeva jer je sama konačna, ali kad bi to bio slučaj, broj N bi se razlikovao sam od sebe prema n-toj znamenci.

6.10.2 Berryev paradoks

Berryev paradoks[12] sadržan je u sljedećoj formulaciji, koji najprije dajemo na engleskome jeziku:

> The least integer not nameable in fewer than nineteen syllables.

Odgovarajući tomu na hrvatskome:

> Najmanji broj neimenljiv u manje od dvadeset slogova.

Prebrojimo slogove u jednoj i drugoj odredbi. Jedna i druga odredba (imenovanje) upravo se imenovale traženi broj u manje od devetnaest, odnosno manje od dvadeset slogova.

6.10.3 Grellingov paradoks

Grellingov je paradoks[13] jezična inačica Russellova paradoksa, o kojem će biti riječ u idućem poglavlju. Najprije uvodimo razlikovanje heterologijskih i autologijskih pridjeva prema tome pridaju li se sebi ili ne. Evo kao objašnjenje nekoliko primjera:

1. heterologijski pridjevi: jednosložan, bijel, drven, brz, itd., jer 'jednosložan' nije jednosložan, 'bijel' nije bijel (pridjevi nemaju boju), 'drven' nije drven (pridjevi nisu drveni), itd.

2. autologijski pridjevi: višesložan, trosložan, hrvatski, izreciv, ne-bijel, itd., jer je 'višesložan' višesložan, 'trosložan' je trosložan, 'hrvatski' je hrvatski (pridjev) itd.

Postavlja se pitanje je li pridjev 'heterologijski' heterologijski? Ako jest, onda se pridaje sebi:

> 'Heterologijski' je heterologijski pridjev

[12]Paradoks je formulirao Bertrand Russell 1906. godine na temelju pisma koje mu je uputio George Godfrey Berry, tadašnji oxfordski knjižničar.

[13]Paradoks je formulirao Kurt Grellling (1908.).

tj. autologijski je. Ako nije heterologijski:

> 'Heterologijski' nije heterologijski pridjev,

onda se ne pridaje sebi, dakle upravo jest heterologijski. U obama slučajima dobivamo protuslovlje.

6.11 Zadatci

1. Pridružite sljedećim formulama njihove Gödelove brojeve:

   (a) $x + 1 = y$,

   (b) $1 \times 2 = 2$,

   (c) $\neg(x + 1 = 0) \times 2$,

   (d) $2 \times (x + y) = z$,

   (e) $\exists x \exists y(x + 2y = 3)$.

2. Neka zadana formula ima Gödelov broj n. Izvršite supstituciju tako da dobivena formula govori o sebi:

   (a) $\neg\forall x D(x, sb(y, y, 13))$,

   (b) $\forall x \neg G(sb(y, y, 13), x)$,

   (c) $\neg F(sb(y, y, 13))$.

3. Je li opća logika prvoga reda (definirana u Dijelu III) sintaktički potpuna?

Poglavlje 7

Logika višega reda

7.1 Paradoksi svojstava i skupova

U logici prvoga reda razlikovali smo pojedinačne predmete i priroke koji govore o pojedinačnim predmetima. No sasvim su prirodne i rečenice kao što su sljedeće.

Hrabrost je krjepost.
Bolje je biti hrabar nego kukavica.
Neumjerenost kvari svakoga čovjeka.
Nijedan kandidat ne posjeduje sve tražene osobine.

U gornjim rečenicama govorimo o samim svojstvima i relacijama: o hrabrosti, o neumjerenosti, te pokoličavamo sama svojstva ("sve tražene osobine"). Jesu li "hrabrost" i "krjepost" *logički* sasvim istovrsna svojstva ili među njima ima neke bitne logičke razlike? Bi li bilo prihvatljivo upotrijebiti logiku prvoga reda i prevesti 'Hrabrost je krjepost' primjerice kao $K(H)$, a 'Bolje je biti hrabar nego kukavica' kao $B(H,K)$? Nadalje, kako možemo pokoličavati svojstva? Ima li nešto takvo kao "sva svojstva", tj. domena koja sadrži sva svojstva i odnose, ili još više, domena kao sadrži sve predmete, svojstva i odnose uopće , "sve što jest" kako se katkad u filozofiji kaže?

7.1.1 Cantorov paradoks

Krenimo najprije od drugoga pitanja, koje se odnosi na pojam "sve što jest", ili, formalnosemantički rečeno, na pojam sveopćega (univerzalnoga) skupa, U. Radi se o Cantorovu paradoksu[1]

[1] Georg Cantor, 1845.–1918., zasnovao je teoriju skupova, a paradoks sveopćega skupa spominje u pismu Dedekindu 1899. godine.

Kako bismo mogli razumijeti taj paradoks, prisjetimo se pojma partitivnoga skupa – partitivni skup skupa S skup je svih podskupova skupa S. Također se prisjetimo i Cantorova poučka (str. 48), prema kojem slijedi da je kardinalni broj skupa S strogo manji od kardinalnoga broja partitivnoga skupa skupa S.

Sada možemo uočiti Cantorov paradoks, prema kojem, kad bi postojao sveopći skup, U, on ipak ne bi mogao biti sveopći, jer u njem ima manje članova nego u partitivnome skupu sveopćega skupa, $\wp U$:

> kardinalni broj sveopćega skupa strogo je manji od kardinalnoga broja partitivnoga skupa sveopćega skupa, $|U| < |\wp U|$.

Ima li dakle uopće nečega takva kao što je sveopći skup, koji bi uključivao sve predmete, sva svojstva i odnose? Je li pojam "sve što jest" održiv?

Sličan je Cantorovu **Burali-Fortiev** paradoks.[2] To je paradoks o skupu svih rednih brojeva. Neka je redni broj definiran kao skup svih prethodnih rednih brojeva. Neka je ω skup svih rednih brojeva. Prema definiciji, redni broj skupa ω jest $\omega + 1$, koji se ne nalazi u skupu svih rednih brojeva ω.

7.1.2 Russellov paradoks

Zadržimo se sada na pitanju logičkoga odnosa između samih svojstava. Ako nema bitne logičke razlike između svojstva i svojstva svojstva, onda možemo govoriti o svojstvima koja se pririču sebi ("prireciva" svojstva) i o svojstvima koja se ne pririču sebi ("ne-prireciva" svojstva). Tako, primjerice,

> svojstvo "biti drven" nije drveno,
> "biti dvomjesna relacija" nije dvomjesna relacija,
> "biti širi od nečega" nije šire ni od čega.

Ali s druge strane,

> svojstvo "biti dobar" dobro je svojstvo,
> "Biti jednomjesna relacija" jest jednomjesna relacija,
> Svojstvo "ne biti drven" nije drveno.

Sada dolazimo do Russellova paradoksa i pitamo o svojstvu "ne priricati se sebi" pririče li se ono sebi kao vlastito svojstvo ili ne?[3] Ako se ne pririče sebi, dobivamo sljedeću tvrdnju:

[2]Talijanski matematičar Cesare Burali-Forti objavio ga je 1897. godine.

[3]Paradoks je otkrio Bertrand Russell 1901. godine (objavljeno u *Principles of Mathematics* 1903.), a istodobno i neovisno o Russellu također i Ernst Zermelo.

"Ne pririče se sebi" ne pririče se sebi

u kojoj se očito "ne pririče se sebi" ponavlja te se stoga pririče sebi. Ako se pak pririče sebi te "ne pririče se sebi" primijenimo na njega samoga, dobivamo ponovno gornju navedenu tvrdnju, koja kaže da se "ne pririče se sebi" ne pririče sebi. Dakle, i jedan i drugi odgovor vode protuslovlju, iz čega proizlazi da je "ne pririče se sebi" antinomično, iako je u mnogim slučajima (kakve smo naveli) primjenjivo bez ikakva protuslovlja. U samome pojmu priricanja i ne priricanja leži neki problem koji ne dopušta neograničeno priricanje nečega (svojstva) nečemu što se i samo pririče.

Svojstva smo u semantici prvoga reda definirali kao skupove pojedinačnih predmeta. Antinomija analogna gornjoj vrijedi i o skupovima. Naime, o skupovima možemo postaviti pitanje jesu li svoji članovi ili nisu? Primjerice, skup svih drvenih predmeta nije član skupa svih drvenih predmeta (jer nijedan skup nije drven), dok bi primjerice, skup svih apstraktnih predmeta bio svoj član (jer je svaki skup nešto apstraktno). Russellov paradoks o skupovima nastaje kad pokušavamo zamisliti skup svih skupova koji nisu svoji članovi:

$$\{x \mid x \notin x\}$$

Pitamo se naime je li taj skup svoj član ili nije. Iz jesnoga odgovora slijedi niječan, jer članom toga skupa može biti samo nešto što nije svoj član. Iz niječnoga odgovora slijedi jestan, jer svaki skup koji nije svoj član, zadovoljava uvjet za članstvo u skupu svih skupova koji nisu svoji članovi.

Ima i popularna inačica Russellova paradoksa[4] u kojoj pretpostavljamo da ima neki brijač koji brije sve one koji sami sebe ne briju. Pokušajte odgovoriti na pitanje brije li taj brijač sam sebe ili ne?

7.2 Tipologija u logici višega reda

Jedno od rješenja paradoksā koje smo naveli, jest uvođenje jedinstvene, sintaktičke i semantičke tipologije, koja postavlja određena ograničenja u tome što uopće može biti prirok ili svojstvo (relacija) i što se može čemu priricati. Prikazat ćemo tipologiju načelno prema Fittingovoj inačici **teorije jednostavnih tipova**.[5]

Ustvari, neke osnovne logičke tipove razlikovali smo već u logici prvoga reda. U njoj smo razlikovali pojedinačne predmete s jedne strane, i s druge strane, njihova svojstva i odnose. Kažemo da su pojedinačni predmeti predmeti prvoga reda,

[4]Russell ju spominje u *Introduction to Mathematical Philosophy*, 1919.
[5]M. Fitting, *Types, Tableaus and Gödel's God*, 2002.

te odtuda i govorimo o logici prvoga reda. Predmetima prvoga reda odgovaraju oznake prvoga reda, koje smo zvali predmetnim konstantama i varijablama. U domeni nije bilo drugih predmeta osim predmeta prvoga reda, i jedino su oni podlijegali pokoličavanju. Nadalje, u logici prvoga reda javljaju se svojstva i odnosi – sve su to, u formalnoj semantici, n-člane relacije. Među njima postoji logička razlika u mjesnosti, i toj razlici odgovara logička razlika u mjesnosti među pirocima. To razlikovanje prema mjesnosti samo je još jedan poseban slučaj logičkoga tipskoga razlikovanja.

U logici višega reda razlikujemo i druge tipove jer se tu javljaju ne samo svojstva, nego i svojstva svojstava i relacija, relacije svojstava i relacija itd. itd. U formalnome definiranju logičkih tipova polazimo od osnovnoga tipa – tipa 0. Jednomjesna relacija (svojstvo) u kojoj se nalaze predmeti tipa 0, jest predmet tipa $\langle 0 \rangle$, što je već tip drugoga reda, dvomjesna relacija u kojoj se nalaze predmeti tipa 0, jest relacija tipa $\langle 0, 0 \rangle$, koja je također predmet drugoga reda. Ako govorimo još i o svojstvu svojstva, dolazimo do tipa $\langle\langle 0 \rangle\rangle$, koji je tip trećega reda. I svojstva mogu biti u relaciji, pa dolazimo do, primjerice, dvomjesnoga tipa (trećega reda) $\langle\langle 0 \rangle, \langle 0 \rangle\rangle$. Evo i nekoliko konkretnih primjera:

0 — tip prvoga reda: Sokrat, ovaj čovjek, Hrvatska,

$\langle 0 \rangle$ — tip drugoga reda: hrabar (hrabrost),

$\langle 0, 0 \rangle$ — tip drugoga reda: veći,

$\langle 0, 0, 0 \rangle$ — tip drugoga reda: između,

$\langle\langle 0 \rangle\rangle$ — tip trećega reda: krjepost, boja,

$\langle\langle 0 \rangle, 0 \rangle$ — tip trećega reda: to da neko svojstvo kvari neki predmet (neumjerenost kvari Antuna), to da neko svojstvo pripada nekomu predmetu,

$\langle\langle 0, 0 \rangle\rangle$ — tip trećega reda: prijateljski odnos,

$\langle\langle 0, 0 \rangle\langle 0, 0 \rangle\rangle$ — tip trećega reda: to da je neki odnos bolji od drugoga (npr. prijateljstvo od mržnje),

$\langle\langle 0, 0 \rangle, 0, 0 \rangle$ — tip trećega reda: to da je neki odnos između dviju osoba prijateljski.

Sada možemo dati i formalnu definiciju tipa i tipskoga reda.

DEFINICIJA 7.1 (TIP)

1. *0 je tip.*

2. *Ako su $\tau_1, \ldots, \tau_n$ tipovi, onda je $\langle\tau_1, \ldots, \tau_n\rangle$ tip.*

DEFINICIJA 7.2 (RED)

1. *Tip 0 jest tip prvoga reda.*

2. *Tip $\langle\tau_1, \ldots, \tau_n\rangle$ jest $k+1$. reda ako i samo ako je neki τ_i k-toga reda, a svaki τ_j koji nije τ_i jest k-toga ili nižega reda.*

Napomenimo da su tipske razlike *relativne*: npr. brojeve možemo uzeti kao predmete tipa 0 (tip prvoga reda), a njihova svojstva i odnose kao tip drugoga reda — iako se, s druge strane (kako ćemo vidjeti) brojevi kao takvi mogu definirati kao svojstva svojstava (tip trećega reda).

Kažemo da su oznake onoga reda kojega su i njima označeni predmeti, kao i da su količitelji istoga reda kao i njima vezane varijable.[6] Prema obziru na tipologiju razlikujemo i logike različitoga reda. Logika u kojoj se javljaju predmeti (kao članovi domene) i količitelji najviše prvoga reda jest logika prvoga reda; logika u kojoj se javljaju predmeti i količitelji najviše drugoga reda, jest logika drugoga reda, itd. Logika u kojoj se javljaju predmeti i količitelji bilo kojega reda većeg od prvoga jest logika višega reda.

7.3 Sintaksa i semantika jezika $\mathscr{L}_V$

U sintaktičkome i semantičkome opisu jezika primjenjujemo upravo prikazanu i definiranu tipologiju.

7.3.1 Jezik

Rječnik

Kako u logici višega reda i priroci mogu uvijek biti "podmeti" novih priroka, i priroke i predmetne oznake možemo shvatiti kao oznake, ali različitoga tipa i reda. Stoga je u rječniku dovoljno zadržati mala latinična slova: konstante i varijable, ali

[6] Valja pripaziti na sljedeće. Za svojstvo predmeta prvoga reda, koje je sāmo tipa drugoga reda, prirodno je ipak reći da je ono "svojstvo prvoga reda", kao i da je svojstvo svojstva "svojstvo drugoga reda" iako je svojstvo svojstva kao takvo već tipa trećega reda.

je svakoj potrebno naznačiti tip. Kako je taj način bilježenja dosta nečitak, obično kao oznake prvoga reda ostaju mala slova, a velika za oznake drugoga reda (kao u logici prvoga reda), dok za oznake višega reda na razne načine stiliziramo slova.

1. Konstante: $c^\tau, d^\tau, e^\tau, c_1^\tau, \ldots$, a neformalno:
   - konstante prvoga reda: $c, d, e, c_1, \ldots$,
   - konstante drugoga reda: $P^n, Q^n, R^n, P_1^n, \ldots$,
   - konstante trećega reda: $\mathcal{P}^\tau, \mathcal{Q}^\tau, \mathcal{R}^\tau, \mathcal{P}_1^\tau, \ldots$,
2. Varijable: $x^\tau, y^\tau, z^\tau, x_1^\tau, \ldots$, a neformalno:
   - varijable prvoga reda: $x, y, z, x_1, \ldots$,
   - varijable drugoga reda: $X^n, Y^n, Z^n, X_1^n, \ldots$,
   - varijable trećega reda: $\mathcal{X}^\tau, \mathcal{Y}^\tau, \mathcal{Z}^\tau, \mathcal{X}_1^\tau, \ldots$,
3. Djelateljni simboli: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \forall, \exists, \lambda$,
4. $=^{\langle \tau, \tau \rangle}$,
5. Pomoćni simboli: . ( )

Primijetimo da je kao novi djelateljni simbol uveden λ (lambda-apstraktor), koji će služiti za tvorbu priroka od formula. Kako ćemo vidjeti, *istovjetnost* se može definirati u logici višega reda, no puno je jednostavnije i praktičnije izravno rabiti istovjetnost.

Tvorbena pravila

Oznaka (term) se i formula moraju definirati zajedno zbog njihove definicijske međuovisnosti.

Definicija 7.3 (Oznaka i formula)

1. *konstante i varijable jesu oznake,*
2. *ako su* $\mathrm{t}^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle}, \mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}$ *oznake,* $\mathrm{t}^{\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle}(\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n})$ *je formula (jednostavna),*

   (neformalno *možemo pisati i* $\mathrm{tt_1 \ldots t_n}$ *ili* $\mathrm{t(t_1, \ldots, t_n)}$*),*

3. *ako je p formula, $\neg p$ je formula,*

4. *su p i q formule, $(p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q), (p \leftrightarrow q)$ jesu formule*

   *(*neformalno*, kad ne proizlazi dvosmislenost, možemo izostaviti vanjske zagrade),*

5. *ako je p formula a x^{τ} varijabla, $\forall \mathrm{x}^{\tau} p$ i $\exists \mathrm{x}^{\tau} p$ jesu formule,*

6. *ako su $\mathrm{x}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{x}_n^{\tau_n}$ različite varijable, a p formula, onda je $(\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1} \ldots \mathrm{x}_\mathrm{n}^{\tau_\mathrm{n}}.p)$ oznaka (λ-apstrakt)*

   *(*neformalno*, kad je λ-apstrakt sam, možemo izostaviti vanjske zagrade).*

Opći i opstojni količitelj vežu pojavke varijabla analogno logici prvoga reda. $\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1} \ldots \mathrm{x}_n^{\tau_n}$ jest λ-djelatelj. On u p veže svaki slobodan pojavak varijabla $\mathrm{x}_1^{\tau_1} \ldots \mathrm{x}_n^{\tau_n}$.

Tipologiju primjenjujemo i na apstrakte. Npr. apstrakt $(\lambda x_1^{\tau_1} \ldots x_n^{\tau_n}.\, p)$ jest tipa $\langle \tau_1, \ldots, \tau_n \rangle$.

Primjer 7.1 *Konkretno, $(\lambda xy.Pxy \wedge Qxy)$ primjer je apstrakta tipa $\langle 0, 0 \rangle$. Napomenimo da se jednostavne formule mogu sastojati i od apstrakata. Tako je $(\lambda xy.Pxy \wedge Qxy)(c, d)$ jednostavna formula, a isto je tako jednostavna i formula $\mathcal{P}(\lambda xy.Pxy \wedge Qxy)$.*

7.3.2 Neformalna semantika

Evo sada i neformalne sematike jezika $\mathscr{L}_V$ objašnjene primjerima prijevoda na hrvatski jezik.

Primjer 7.2

1. *Xx i $\mathcal{V}X$: x ima svojstvo X, X je svojstvo koje čini velikoga generala,*

2. *$\exists X(\mathcal{K}X \wedge Xa)$: Antun ima neku krjepost.*

3. *$\exists X(Xn \wedge Xa)$: Antun ima neko Napoleonovo svojstvo.*

4. *$\lambda x.\forall X(\mathcal{V}X \rightarrow Xx)$ (apstrakt tipa $\langle 0 \rangle$) : imati sva svojstva koja čine velikoga generala*

5. *$(\lambda x.\forall X(\mathcal{V}X \rightarrow Xx))(n)$, jednostavnije $\forall X(\mathcal{V}X \rightarrow Xn)$: Napoleon ima sva svojstva koja čine velikoga generala.*

6. *biti Napoleonovo svojstvo :* $\lambda X.Xn$,

7. $(\lambda X.Xn)(H)$, *jednostavnije* Hn *: Hrabrost je Napoleonovo svojstvo.*

8. $(\lambda X.Xn)(\lambda x.\exists y Pxy)$ *: Biti pobjednik nad nekim jest Napoleonovo svojstvo.*

9. $\lambda Xx.\mathcal{K}(X, x)$ *: biti nečija krjepost,*

10. $\mathcal{H}(\lambda y.\exists x(Qx \land Pyx))$ *: Pomoći nekomu u nevolji hvalevrijedno je.*

11. $\mathcal{R}(\lambda x.\forall X(\mathcal{V}X \to Xx))$ *: Imati sva svojstva velikoga generala rijetko je svojstvo.*

NAPOMENA 7.1 *Gornji apstrakt* $\lambda x.\forall X(\mathcal{V}X \to Xx)$ *analogan je Russellovu primjeru. To je "impredikativno" svojstvo jer samo potpada pod domenu vezane varijable X, koja je dio njegove odredbe. Naime, to je svojstvo tipa* $\langle 0 \rangle$*, a vezana varijabla X, koju sadrži u svojem izrazu, također je toga tipa. Sam je Russell isključio u svojoj inačici teorije tipova ("razgranata teorija tipova") takva svojstva (pojmove). On je kao rješenje antinomija postavio "načelo poročnoga kruga", prema kojem ono što uključuje sve članove neke sveukupnosti (ili se definira njima) ne može biti član te sveukupnosti. U njegovoj formalizaciji pojma "imati sva svojstva velikoga generala" ta su svojstva samo ona koja se izravno odnose na pojedinačne predmete ("prirična" svojstva), dok se "imati sva svojstva velikoga generala" kao takvo ne odnosi izravno na pojedinačne predmete nego tek preko vezane varijable "svojstva", X (takve pojmove Russell nazivlje "nepriričnima"). Stoga je Russellova formalizacija nešto drukčija:* $\forall\phi(f(\phi!\hat{z}) \to \phi!x)$*, gdje ! označuje "priričnost" u Russellovu smislu. Jednostavna teorija tipova, koju ovdje prikazujemo, sprječava antinomična "impredikativna" svojstva time što isključuje da se isti tip pririče istomu tipu, no ne isključuje sva "impredikativna" svojstva.*

7.3.3 Standardna formalna semantika

U standardnoj semantici višega reda ključno je voditi računa o svim različitim tipovima oznaka te im pridruživati samo značenja (predmete) istoga tipa. U skladu se s time razlikuju i domene, svaka za predmete posebnoga tipa.

DEFINICIJA 7.4 (STANDARDNI MODEL) *Standardni model* $\mathfrak{M}$ *je uređen par* $\langle \mathrm{D}, \mathcal{T} \rangle$ *gdje*

1. $\mathrm{D} = \mathrm{D}^0$ *je neprazan skup,*

2. *$\mathcal{T}$ je tumačenje takvo da za svaku konstantu* c^τ, $\mathcal{T}(\mathrm{c}^\tau) \in \mathrm{D}^\tau$, *pri čem* $\mathrm{D}^{\langle\tau_1,\ldots,\tau_n\rangle} = \wp(\mathrm{D}^{\tau_1} \times \ldots \times \mathrm{D}^{\tau_n})$,

3. $\mathcal{T}(=^{\langle\tau,\tau\rangle}) = \{\langle \mathrm{d}^\tau, \mathrm{d}^\tau\rangle \mid \mathrm{d}^\tau \in \mathrm{D}^\tau\}$.

Definicija 7.5 (Vrjednovanje varijabla) *Vrjednovanje varijabla v svakoj varijabli* x^τ *pridružuje predmet* d^τ, *tj.* $v(\mathrm{x}^\tau) \in \mathrm{D}^\tau$.

Definicija 7.6 (Označivanje konstantama i varijablama)

$$[\![\mathrm{c}^\tau]\!]^{\mathfrak{M}}_v = \mathcal{T}(\mathrm{c}^\tau), \quad [\![\mathrm{x}^\tau]\!]^{\mathfrak{M}}_v = v(\mathrm{x}^\tau)$$

U iduću je definiciju uključeno i definiranje značenja λ-apstrakata, jer oni, premda nisu formule, sadrže formulu i u svom značenju ovise o njezinoj zadovoljenosti.

Definicija 7.7 (Zadovoljenost formula i označivanje apstraktima)

1. $\mathfrak{M} \models_v \mathrm{t}(\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_n)$ *akko* $\langle [\![\mathrm{t}_1]\!]^{\mathfrak{M}}_v, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]^{\mathfrak{M}}_v\rangle \in [\![\mathrm{t}]\!]^{\mathfrak{M}}_v$,

2. $\mathfrak{M} \models_v \mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2$ *akko* $[\![\mathrm{t}_1]\!]^{\mathfrak{M}}_v = [\![\mathrm{t}_2]\!]^{\mathfrak{M}}_v$,

3. $\mathfrak{M} \models_v \neg p$ *akko* $\mathfrak{M}, v \not\models p$,

4. $\mathfrak{M} \models_v p \wedge q$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *i* $\mathfrak{M} \models_v q$,

5. $\mathfrak{M} \models_v p \vee q$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,

6. $\mathfrak{M} \models_v p \rightarrow q$ *akko* $\mathfrak{M} \not\models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,

7. $\mathfrak{M} \models_v p \leftrightarrow q$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *i* $\mathfrak{M} \models_v q$, *ili* $\mathfrak{M} \not\models_v p$ *i* $\mathfrak{M} \not\models_v q$,

8. $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x}^\tau p$ *akko za svaki* $\mathrm{d}^\tau \in \mathrm{D}^\tau$, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}^\tau/x^\tau]} p$,

9. $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x}^\tau p$ *akko barem za jedan* $\mathrm{d}^\tau \in \mathrm{D}^\tau$, $\mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}^\tau/x^\tau]} p$,

10. $[\![(\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1} \ldots \mathrm{x}_n^{\tau_n}.\, p)]\!]^{\mathfrak{M}}_v = \{\langle \mathrm{d}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{d}_n^{\tau_n}\rangle \mid \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}_1^{\tau_1}/x_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{d}_n^{\tau_n}/x_n^{\tau_n}]} p\}$.

Definicija 7.8 (Zadovoljivost) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv akko je svaki član* Γ *istinit barem u jednome modelu* $\mathfrak{M}$.

Definicija 7.9 (Semantička posljedica i valjanost)

- $\Gamma \models p$ *akko je p istinito u svakome standardnome modelu u kojem je istinit svaki član* Γ.
- *Zaključak je valjan akko je njegov zaglavak istinit u svakome standardnome modelu u kojem su sve njegove premise istinite.*
- *Iskaz je valjan akko je istinit u svakome standardnome modelu.*

DEFINICIJA 7.10 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST) *Iskazi su p i q semantički istovrijedni akko su u svakome standardnome modelu* $\mathfrak{M}$ *oba istiniti ili oba neistiniti.*

7.3.4 Svojstva relacija i istovjetnost

Logikom višega reda ne samo da se rješavaju logičke antinomije, nego se i znatno povećava izražajna moć logike. Pokazat ćemo najprije kako možemo izraziti brojeve, te zatim pokazati kako možemo izraziti i definirati neke važne pojmove koje smo u logici prvoga reda mogli samo pretpostaviti. Zadržat ćemo se na relaciji istovjetnosti i općenito na nekim ključnim svojstvima relacija i funkcija (koje su same određena vrsta relacija).

Svojstva relacija i funkcije

Analizirajući i uspoređujući relacije govorimo, primjerice, o njihovoj refleksivnosti, simetričnosti, prijelaznosti, euklidskosti. Evo kako u logici višega reda definiramo ta svojstva relacija. Ta smo svojstva mogli u logici prvoga reda izraziti za pojedine relacije, a sada ih možemo općenito definirati. Dajemo primjer defincija za relacije nad predmetima prvoga reda:

refleksivnost: $\mathcal{R}X \leftrightarrow_{def} \forall xXxx$, npr. 'istovjetan', 'sličan',
simetričnost: $\mathcal{S}X \leftrightarrow_{def} \forall x\forall y(Xxy \rightarrow Xyx)$, npr. 'blizu', 'daleko',
prijelaznost: $\mathcal{P}X \leftrightarrow_{def} \forall x\forall y\forall z((Xxy \wedge Xyz) \rightarrow Xxz)$, npr. 'veći', 'manji', 'stariji', 'mlađi', 'mudriji',
euklidskost: $\mathcal{E}X \leftrightarrow_{def} \forall x\forall y\forall z((Xxy \wedge Xxz) \rightarrow Xzy)$, npr. spojivost točaka u euklidskome prostoru.

Isto tako možemo sada općenito izraziti kada je neka relacija funkcija. Dajemo primjer za jednomjesne funkcije također nad predmetima prvoga reda:

$$\mathcal{F}X \leftrightarrow_{def} \forall x\exists y\forall z(Xxz \leftrightarrow z = y)$$

Konvencionalno možemo za relaciju X koja je funkcija, kao pokratu (iako formalno nije u rječniku) pisati varijablu u. Pritom je u istoga tipa kao i X, ali je ispunjen i upravo navedeni uvjet funkcionalnosti. Nadalje, umjesto Xxz (gdje je X funkcija) uobičajeno pišemo $u(x) = z$. Sljedećim uvjetima definiramo injektivnost i surjektivnost funkcije (kao tipove trećega reda):

$$\mathcal{IN}(u) \leftrightarrow_{def} \forall x \forall y((u(x) = u(y)) \rightarrow x = y),$$
$$\mathcal{SUR}(u) \leftrightarrow_{def} \forall y \exists x\, u(x) = y.$$

Beskonačnost i izbrojivost

Na temelju upravo definiranih svojstava funkcija može se unutar same logike višega reda definirati pojam **beskonačnosti**. Definirat ćemo pojam tzv. "Dedekindove beskonačnosti", prema kojem je skup beskonačan ako i samo ako ima injektivna funkcija nad njim koja nije surjektivna (usp. s definicijom na str. 47). To da ima beskonačan broj predmeta x, tj. da je domena, $\lambda x.x = x$, beskonačna, definiramo na sljedeći način:

$$\mathcal{BEZ}(\lambda x.x = x) \leftrightarrow_{def} \exists u(\mathcal{IN}(u) \wedge \neg\mathcal{SUR}(u))$$

gdje je u funkcija nad domenom predmetā x.

Sada ćemo definirati i svojstvo da ima **izbrojivo** mnogo predmeta x, tj. da je domena, $\lambda x.x = x$, izbrojiva (prisjetimo se da izbrojiv skup može biti konačan ili beskonačan):

$$\mathcal{IZ}(\lambda x.x = x) \leftrightarrow_{def} \exists u \exists x \forall X((Xx \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xu(y))) \rightarrow \forall z Xz) \tag{7.1}$$

Prebrojiv je skup beskonačan i izbrojiv. To sad možemo lijepo izraziti ujedinjujući definiciju beskonačnosti i izbrojivosti, i to tako da neku funkciju u stavimo pod uvjet nesurjektivnosti i injektivnosti, i ujedno nekom funkcijom u osiguramo izbrojivost:

1) $\exists u(\exists x \forall y \neg u(y) = x$
2) $\quad \wedge \forall x \forall y(u(x) = u(y) \rightarrow x = y))$
3) $\exists u \exists x \forall X((Xx \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xu(y))) \rightarrow \forall z Xz)$

Primijenimo li sve te uvjete na sljedbeničku funkciju ($'$) i usporedimo li ih s aksiomima sustava **PA** (aritmetike prvoga reda), uočavamo da prvi uvjet odgovara aksiomu A1 (s poopćenjem broja 0), drugi aksiomu A2, a treći je AS izražena kao pravi iskaz jezika višega reda. To nipošto ne čudi jer svaki prebrojiv skup stoji u odnosu uzjamnoga odgovaranja 1–1 sa skupom prirodnih brojeva i izomorfan mu je (tj. pojednostavnjeno rečeno, uz sve odnose iste, samo su svi članovi jednoga skupa zamijenjeni drugima).

Sve navedene uvjete možemo ujediniti u konjunkciju kojom definiramo prebrojivost domene:

$$\begin{aligned}\mathcal{PRE}(\lambda x.x = x) \quad \leftrightarrow_{def} \quad & \exists u(\exists x \forall y \neg u(y) = x \wedge \forall x \forall y(u(x) = u(y) \rightarrow x = y)) \\ & \wedge (\exists u \exists x \forall X((Xx \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xu(y))) \rightarrow \forall z Xz)))\end{aligned}$$

Riješite zadatak 3, koji se odnosi na **neprebrojivost**.

Ne vrijedi Löwenheim-Skolemov poučak, nekompaktnost

Iskaz $\neg\mathcal{IZ}(\lambda x.x = x) \wedge \mathcal{BEZ}(\lambda x.x = x)$ zadovoljiv je na neprebrojivoj domeni (kao što je skup realnih brojeva), ali ne i na prebrojivoj. Iz toga slijedi da ne vrijedi (silazni) Löwenheim-Skolemov poučak (prema kojem bi svaki zadovoljiv skup iskaza logičkoga jezika s istovjetnošću trebao biti zadovoljiv na izbrojivoj, tj. konačnoj ili prebrojivoj domeni, v. poučak 5.3).

S druge strane, iskaz $\mathcal{PRE}(\lambda x.x = x)$ zadovoljiv je na prebrojivoj domeni, ali ne i na neprebrojivoj. Stoga ne vrijedi ni tzv. uzlazni Löwenheim-Skolemovu poučak (prema kojem bi skup zadovoljiv prebrojivim modelom treba biti zadovoljiv i neprebrojivim modelom, v. str. 51).

Također, logika je višega reda nekompaktna. Promotrimo sljedeći niz iskaza, koji kazuju, redom, da ima barem dva, barem tri itd. predmeta (uvijek ima barem jedan predmet zbog nepraznosti domene):

$$\begin{aligned}\geq 2(\lambda x.x = x) \quad & \leftrightarrow_{def} \quad \exists x_1 \exists x_2 \neg x_1 = x_2 \\ \geq 3(\lambda x.x = x) \quad & \leftrightarrow_{def} \quad \exists x_1 \exists x_2 \exists x_3 \neg(x_1 = x_2 \vee x_1 = x_3 \vee x_2 = x_3)\end{aligned}$$

itd.

Skup

$$K = \{\neg\mathcal{BEZ}(\lambda x.x = x),\ \geq 2(\lambda x.x = x),\ \geq 3(\lambda x.x = x), \ldots\}$$

nezadovoljiv je, iako je svaki njegov konačan podskup zadovoljiv. Dakle, logika je višega reda nekompaktna.

Prirodni brojevi

Prijeđimo sada na prirodne brojeve. Analogno načinu kako smo mogli izraziti broj predmeta (s nekim svojstvom) u logici prvoga reda, sada možemo izraziti broj predmeta prema pojedinim tipovima, te taj izraz skratiti samo na jedan simbol (brojku) koji je dva reda višega tipa od tipa predmeta koji se broje. Semantički (u modelu), to znači da je prirodan broj (uključujući broj nula) shvaćen kao skup (jednakobrojnih) skupova predmeta koji se broje. To je najuočljivije u doslovnome formalnom zapisu. Uzmimo kao primjer da ima dva predmeta tipa 0. Broj 2 bi tada bio tipa $\langle\langle 0\rangle\rangle$, tj. u dosljedno formalnome jeziku (s pokazateljima tipa):

$$2^{\langle\langle 0\rangle\rangle}x^{\langle 0\rangle} \quad \leftrightarrow_{def} \quad \exists x^0 \exists y^0(\neg x^0 = y^0 \wedge \forall z^0(x^{\langle 0\rangle}z^0 \leftrightarrow (z^0 = x^0 \vee z^0 = y^0)))$$

Dakle, općenito, broj predmeta $\mathrm{t_1}^0, \ldots, \mathrm{t_n}^0$ jest $n^{\langle\langle 0\rangle\rangle}$. To da primjerice sveukupno ima dva predmeta tipa 0, možemo izraziti uz pomoć λ-apstrakta:

$$2^{\langle\langle 0\rangle\rangle}(\lambda x^0.x^0 = x^0)$$

Takav je način definiranja prirodnih brojeva karakterističan za "logicistički" pristup (npr. Frege, Russell) s ciljem svođenja matematike na logiku.

S druge strane, aritmetika se prvoga reda (i sustav **PA**) može ugraditi u logiku višega reda polazeći od broja 0 kao predmeta prvoga reda u domeni, i sljedbeničke funkcije $'$, te definirajući uvjete koji odgovaraju aksiomima A1 i A2 i shemi AS sustava **PA**. Pritom se AS može izraziti kao pravi iskaz u jeziku višega reda (ne samo kao shema). Tri navedena uvjeta, povezani u konjunkciju, sada glase:

$$\begin{aligned} PA \quad = \quad & \forall x \neg x' = 0 \ \wedge \ \forall x \forall y(x' = y' \rightarrow x = y) \\ & \wedge (\forall X((X(0) \wedge \forall y(Xy \rightarrow Xy')) \rightarrow \forall z Xz)) \end{aligned}$$

(Aksiomi A3–A6, koji se odnose na zbrajanje i množenje, mogu se izostaviti jer se zbrajanje i množenje (slično kao i istovjetnost) mogu definirati iskazima višega reda.)

Istovjetnost

U logici je prvoga reda = bio osnovni (nedefinirani) simbol. Tako smo ga uveli i u logiku višega reda, iako tu istovjetnost možemo definirati, te se simbolom = služiti samo kao (neobveznom) pokratom. Definicija se temelji na ideji da su predmeti koji imaju sva svojstva ista, zapravo jedan te isti predmet (nema dvaju različitih predmeta kojima su sva njihova svojstva zajednička):

$$x = y \leftrightarrow_{def} \forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$$

U toj su definiciji sadržana dva načela – načelo nerazlučljivosti istovjetnoga:

$$x = y \rightarrow \forall X(Xx \leftrightarrow Xy)$$

i načelo istovjetnosti nerazlučljivoga:

$$\forall X(Xx \leftrightarrow Xy) \rightarrow x = y$$

koja se pripisuju Leibnizu. Russell je pojednostavnio definiciju istovjetnosti na sljedeći način:

$$x = y \leftrightarrow_{def} \forall X(Xx \rightarrow Xy)$$

Pod količiteljem $\forall X$ ostavljena je samo pogodba jer X može biti i svojstvo pripadno samo jednomu predmetu, npr. svojstvo "biti predmet x". Tada, prema Russellovoj definiciji, y ima i to svojstvo, da je predmet x, i nadalje, tada sva svojstva koja ima predmet y, ima i predmet x.

7.3.5 Nepotpunost deduktivnoga sustava

Može se pokazati da je svaki pouzdani sustav logike višega reda nepotpun, tj. ne može dokazati svaku semantičku posljedicu. Uobičajen je dokaz iz nekompaktnosti. Neka je $\vdash$ dokažljivost u deduktivnome sustavu logike višega reda, **V**, i neka je **V** pouzdan, a neka je $\models$ zadovoljenost u semantici logike višega reda. Dokaz je neizravan i oslanja se na skup $K = \{\neg\mathcal{BEZ}(\lambda x.x = x), \geq 2(\lambda x.x = x), \geq 3(\lambda x.x = x), \ldots\}$ iz dokaza o nekompaktnosti (v. str. 84):

$K \models \bot$ (K je nezadovoljiv).

Neka je sustav **V** potpun.

Dakle $K \vdash \bot$ (jer $K \models \bot$),

dakle $K' \vdash \bot$ (za konačan $K' \subseteq K$, zbog konačnosti dokaza),

dakle $K' \models \bot$ (prema pouzdanosti),

ali svaki je konačan podskup skupa K zadovoljiv,

dakle $K \nvdash \bot$ (što protuslovi trećemu retku gore),

Dakle, sustav **V** nije potpun.

Pri tom je riječ o potpunosti u smislu da $\Gamma \vdash p$ ako $\Gamma \models p$ (*jaka* potpunost).

U gornjem se dokazu $K \models \bot$ ne da zamijeniti valjanošću pogodbe u kojoj bi prednjak bio konjunkcija svih članova K, jer je K beskonačan. Stoga nije dokazano da možda svi valjani iskazi ipak jesu poučci u sustavu logike višega reda (*slaba* potpunost). Potpunost u slabom smislu opovrgava se pomoću Gödelova poučka o nepotpunosti. Naime aritmetički sustav prvoga reda **PA** dade se ugraditi u logiku višega reda formuliranjem uvjeta *PA* u cijelosti (uključujući i AS) iskazima jezika višega reda i prenošenjem iskaza aritmetike prvoga reda u jezik višega reda (koji ima oznake za 0 i za sljedbeničku funkciju). Neka je p_{PA} iskaz logike **PA** preuzet u logiku višega reda. Vrijedi da je p_{PA} istinito u aritmetici prvoga reda ako i samo ako je $PA \to p_{PA}$ valjano u logici višega reda. Međutim, kao što, prema Gödelovu poučku, sustav **PA** ne dokazuje sve aritmetičke istine prvoga reda, tako ni sustav logike višega reda ne dokazuje sve valjane iskaze oblika $PA \to p_{PA}$. Prema tome sustav logike višega reda ne posjeduje ni *slabu* potpunost, tj. nisu svi valjani iskazi poučci.

7.3.6 Napomena o Henkinovim modelima

Za razliku od standardnih modela višega reda, i polazeći od njih, mogu se definirati Henkinovi (opći) modeli višega reda. Ključna je razlika Henkinovih modela prema standardnima to da imamo izbor što ćemo uvrstiti u više domene. Ako je, primjerice, osnovna domena neki neprazan skup D^0, onda $\mathrm{D}^{\langle 0\rangle}$ ne mora (ali može) biti cijeli partitivni skup skupa D^0. Općenito, nije više dovoljno, kao u standardnim modelima, definirati domenu D^0, čime bi "automatski" bile definirane i sve više domene (kao partitivni skupovi). U Henkinovoj je semantici višega reda potrebno posebno definirati i više domene, i to kao izabrane podskupove partitivnih skupova – osim praznoga skupa:

$$\mathrm{D}^{\langle \tau_1,\ldots,\tau_n\rangle} \subseteq \wp(\mathrm{D}^{\tau_1} \times \ldots \times \mathrm{D}^{\tau_n}) \backslash \{\varnothing\}$$

Kako bi Henkinovi modeli omogućili *pouzdanost* deduktivnoga sustava, potrebno je označivanje svakoga λ-apstrakta (npr. $\lambda x.\phi$) uskladiti sa zadovoljenošću pripadne formule (ϕ), tako da u domeni višega reda postoji onaj skup predmeta nižega reda koji zadovoljava formulu ϕ, i da upravo taj skup bude pridružen λ-apstraktu:

$$[\![(\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1} \ldots \mathrm{x}_n^{\tau_n}.\, p)]\!]_v^{\mathfrak{M}} = \{\langle \mathrm{d}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{d}_n^{\tau_n}\rangle \mid \mathfrak{M} \models_{v_{[\mathrm{d}_1^{\tau_1}/x_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{d}_n^{\tau_n}/x_n^{\tau_n}]}} p\}$$

Nazovimo takve Henkinove modele "pravim" Henkinovim modelima. Uočimo iz svega da su standardni modeli višega reda samo poseban slučaj Henkinovih (pravih) modela. Pravi modeli osiguravaju da prebrojiva domena ima prebrojivu (ne nužno i neprebrojivu) naddomenu, jer ima upravo prebrojivo mnogo formula koje mogu činiti λ-apstrakt određenoga tipa. Stoga semantički slijed koji vrijedi u standardnoj semantici, ne mora vrijediti i u Henkinovoj semantici jer može biti opovrgnut modelima (i pravim) kojih u standardnoj semantici nema (tamo je nad-domena prebrojive domene uvijek neprebrojiva).

Kako se može pozitivno dokazati, Henkinova je logika (s pravim modelima) *potpuna*. U dokazu potpunosti, slično kao za logiku prvoga reda, služimo se kanonskim (jezičnim) modelima, pri čem su domene u takvu modelu prebrojive. Na temelju toga se može dokazati *Löwenheim-Skolemov poučak* (silazni i uzlazni) kao i *kompaktnost*. Kako je prema tome svaka formula zadovoljiva na prebrojivoj domena, uvjeti koji su u standardnoj logici višega reda definirali Peanovu aritmetiku (*PA*), a koji uključuju pojam prebrojivosti, ne mogu specifično obilježiti prebrojivo predmetno područje, kao što se ne može specifično obilježiti ni neprebrojivo predmetno područje.[7]

Logika višega reda s pravom Henkinovom semantikom, može se, s manjim formalnim prilagodbama, prikazati kao *logika prvoga reda* s više neovisnih domena (višesortna logika), pri čem je odnos članstva između članova niže i više domene zamijenjen relacijom između postavljenih domena koja se u modelu posebno definira.

7.3.7 Metode u logici višega reda

Metode kojima se služimo u logici prvoga reda sada prilagođavamo uporabi u logici višega reda. Uvodi se tipologija oznaka, pravilo za definiciju istovjetnosti kao i posebna pravila za λ-apstrakte. Iako smo istinitosno stablo uveli za iskaznu logiku i logiku prvoga reda kao semantičku metodu koja nam vrlo zorno predočava semantičke odnose, istinitosno je stablo kao takvo, kao i naravna dedukcija, također jedan formalizirani postupak prema pravilima, te kao takva ne može biti potpuna prema obziru na standardnu semantiku višega reda. Metode istinitosnoga stabla i naravne dedukcije, za koje dajemo samo prijegled karakterističnih pravila, nisu potpune u odnosu prema standardnoj semantici višega rada, ali su pouzdane i potpune u odnosu prema Henkinovim (pravim) modelima višega reda.

7.3.8 Istinitosno stablo

Navodimo pravila za količitelje, istovjetnost i λ-apstrakciju.

[7]Modeli za koje su uvjeti *PA* istiniti, mogu dakle biti prebrojivi, ali i neprebrojivi. Prema tome, nisu izomorfni, te uvjet *PA* u Henkinovim modelima nije kategoričan. Za izmomorfizam i kategoričnost v. str. 57.

$$\begin{array}{lccc}
h & \forall \mathrm{x}^\tau p & & \\
 & | & & \\
i & p(\mathrm{t}^\tau/\mathrm{x}^\tau) & h\forall & \\
 & \mathrm{t}^\tau \textit{ je zatvorena oznaka} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
h & \neg\forall \mathrm{x}^\tau p\checkmark & & \\
 & | & & \\
i & \neg p(\mathrm{c}^\tau/\mathrm{x}^\tau) & h\neg\forall & \\
 & \mathrm{c}^\tau \textit{ je nova konstanta} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccc}
h & \exists \mathrm{x}^\tau p\checkmark & & \\
 & | & & \\
i & p(\mathrm{c}^\tau/\mathrm{x}^\tau) & h\exists & \\
 & \mathrm{c}^\tau \textit{ je nova konstanta} & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lccc}
h & \neg\exists \mathrm{x}^\tau p & & \\
 & | & & \\
i & \neg p(\mathrm{t}^\tau/\mathrm{x}^\tau) & \neg\exists & \\
 & \mathrm{t}^\tau \textit{ je zatvorena oznaka} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lll}
h & \mathrm{t}_1^\tau = \mathrm{t}_2^\tau & \\
i & p(\mathrm{t}_1^\tau/\mathrm{x}^\tau) & \\
 & \quad | & \\
j & p(\mathrm{t}_2^\tau/\mathrm{x}^\tau) & h, i \; =
\end{array}$$

p je slovni iskaz,
t_1^τ i t_2^τ su zatvorene oznake

$$\begin{array}{lccc}
 & / & \backslash & \\
h & \neg(\mathrm{t}_a^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle}(\mathrm{t}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{t}_n^{\tau_n}) \leftrightarrow \mathrm{t}_b^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle}(\mathrm{t}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{t}_n^{\tau_1})) & \mathrm{t}_a^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle} = \mathrm{t}_b^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle} & def. =
\end{array}$$

$\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}$ *su zatvorene oznake*

$$\begin{array}{lcc}
h & (\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{x}_n^{\tau_n}.\, p)(\mathrm{t}_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{t}_n^{\tau_n}) & \\
 & | & \\
i & p(\mathrm{t}_1^{\tau_1}/\mathrm{x}_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{t}_n^{\tau_n}/\mathrm{x}_n^{\tau_n}) & h\lambda
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lcc}
h & \neg(\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{x}_n^{\tau_n}.\, p)(\mathrm{t}_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{t}_n^{\tau_n}) & \\
 & | & \\
i & \neg p(\neg\mathrm{t}_1^{\tau_1}/\mathrm{x}_1^{\tau_1},\ldots,\mathrm{t}_n^{\tau_n}/\mathrm{x}_n^{\tau_n}) & h\neg\lambda
\end{array}$$

$\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}$ *su zatvorene oznake*

7.3.9 Deduktivni sustav

Dajemo prijegled pravila za količitelje, istovjetnost i λ-apstrakciju.

$$\begin{array}{l|ll}
h & \forall \mathrm{x}^\tau p & \\
i & \boxed{p(\mathrm{t}^\tau/\mathrm{x}^\tau)} & h\ i\forall
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l|ll}
h & p & \\
i & \boxed{\forall \mathrm{x}^\tau p(x^\tau/c^\tau)} & h\ u\forall
\end{array}$$

t^τ je zatvorena oznaka

c^τ se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama

$$\begin{array}{r|l} h & p(\mathrm{t}^\tau/\mathrm{x}^\tau) \\ i & \boxed{\exists \mathrm{x}^\tau p} \qquad h\ u\exists \end{array}$$
t^τ je zatvorena oznaka

$$\begin{array}{r|l} h & \exists \mathrm{x}^\tau p \\ i & \quad \underline{p(\mathrm{c}^\tau/\mathrm{x}^\tau)} \\ j & \quad q \qquad\qquad h\ i\forall \\ k & \boxed{q} \qquad\qquad h, i\text{–}j\ i\exists \end{array}$$
c^τ se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama, $\exists \mathrm{x}^\tau p$ ili q

$$\begin{array}{r|l} h & \boxed{\mathrm{t}_1^\tau = \mathrm{t}_2^\tau} \quad u\ = \end{array}$$
t_1^τ i t_2^τ su zatvorene oznake

$$\begin{array}{r|l} h & \mathrm{t}_1^\tau = \mathrm{t}_2^\tau \\ i & p(\mathrm{t}_1^\tau/\mathrm{x}^\tau) \\ j & \boxed{p(\mathrm{t}_2^\tau/\mathrm{x}^\tau)} \quad h, i\ \mathrm{i} = \end{array}$$
t_1^τ, t_2^τ i x su zatvorene oznake

$$\begin{array}{r|l} h & \mathrm{t}_1^\tau = \mathrm{t}_2^\tau \\ i & p(\mathrm{t}_2^\tau/\mathrm{x}^\tau) \\ j & \boxed{p(\mathrm{t}_1^\tau/\mathrm{x}^\tau)} \quad h, i\ \mathrm{i} = \end{array}$$
t_1^τ, t_2^τ i x su zatvorene oznake

$$\begin{array}{r|l} h & \quad \underline{\neg(\mathrm{t}_a^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle}(\mathrm{t}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{t}_n^{\tau_n}) \leftrightarrow \mathrm{t}_b^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle}(\mathrm{t}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{t}_n^{\tau_1}))} \\ i & \quad p \\ & \\ j & \quad \underline{\mathrm{t}_a^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle} = \mathrm{t}_b^{\langle\tau_1\ldots\tau_n\rangle}} \\ k & \quad p \\ l & \boxed{p} \qquad\qquad\qquad\qquad h\text{–}i,\ j\text{–}k\ \mathrm{def.} = \end{array}$$
$\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n}^{\tau_\mathrm{n}}$ su zatvorene oznake.

$$\begin{array}{r|l} h & p(\mathrm{t}_1^{\tau_1}/\mathrm{x}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}/\mathrm{x}_n^{\tau_n}) \\ i & \boxed{(\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{x}_n^{\tau_n}.\ p)(\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n})} \quad h\ u\lambda \end{array}$$
t^τ je zatvorena oznaka.

$$\begin{array}{r|l} h & (\lambda \mathrm{x}_1^{\tau_1}\ldots\mathrm{x}_n^{\tau_n}.\ p)(\mathrm{t}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}) \\ i & \boxed{p(\mathrm{t}_1^{\tau_1}/\mathrm{x}_1^{\tau_1}, \ldots, \mathrm{t}_n^{\tau_n}/\mathrm{x}_n^{\tau_n})} \quad h\ i\lambda \end{array}$$
t^τ je zatvorena oznaka.

7.4 Dodatak: aksiomatizacija teorije skupova

Spomenuli smo da jedno od rješenja Russellove (Zermelove) antinomije daje i aksiomatizacija teorije skupova. U "naivnoj" teoriji skupova (prije otkrića antinomija) vrijede sljedeći aksiom i aksiomatska shema:

1. aksiom opsegovnosti:

$$\forall x \forall y (\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \rightarrow x = y)$$

2. aksiomatska shema sadržaja:

$$\exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow p(y))$$

Kako p može sadržavati i druge varijable, preciznija je formulacija: $\forall z_1 \ldots \forall z_n \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow p(y))$

Aksiomatska shema naznačuje beskonačno mnogo aksioma koji su svi podvedivi pod isti oblik (ovisno o tome što stoji za p). Takva teorija skupova vodi u paradokse (usp. Russellov paradoks za teoriju skupova). Ernst Zermelo aksiomatizirao je teoriju skupova (1908.) na način kako bi se izbjegli paradoksi. Ta je teorija, uz neke kasnije preinake, poznata pod nazivom '*ZF*' (Zermelo-Fraenkel), a ako joj se doda aksiom izbora (v. dolje), označuje se s '*ZFC*' ('*C*' za 'choice', 'izbor'). U teoriji se *ZF(C)* umjesto aksioma sadržaja uvodi aksiom odijeljenosti (v. dolje). No kako aksiom odijeljenosti postavlja velika ograničenja, pretpostavljajući da su nadskupovi već dani, potrebno je drugim aksiomima osigurati pojedine oblike skupova. Navodimo aksiome teorije *ZFC* uz kraće komentare.

1. Aksiom opsegovnosti, v. gore!

2. Aksiomatska shema odijeljenosti (separacije, aksiom podskupova):

   $$\forall z \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in z \land p(y))$$

   Nadskup z mora već biti dan. Tada pomoću uvjeta p za sve ili neke njegove članove dobivamo podskup skupa z. Poopćeno: $\forall w_1 \ldots w_n \forall z \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow (y \in z \land p(y))$.

3. Aksiom praznoga skupa (x je prazan skup):

   $$\exists x \forall y \, y \notin x$$

   Uvodimo oznaku '$\varnothing$' za prazan skup.

4. Aksiom parova (z je par):

   $$\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow (w = x \lor w = y))$$

   Uvodimo '$\{x, y\}$' kao oznaku za neuređen par. U slučaju $x = y$, aksiomom je osigurana opstojnost skupa s jednim članom.

5. Aksiom spoja (unije) (y je unija članova x):

   $$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \land w \in x))$$

   Uvodimo oznaku '$\cup$' za uniju.

6. Aksiom partitivnoga skupa – svaki skup x ima svoj partitivni skup y:

   $$\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \subseteq x)$$

   Definiramo pojam podskupa: $x \subseteq y =_{def} \forall z (z \in x \rightarrow z \in y)$, te uvodimo '$\wp x$' kao oznaku za partitivni skup skupa x.

7. Aksiom beskonačnosti – opstoji skup svih prirodnih brojeva:

   $$\exists x (\varnothing \in x \land \forall y (y \in x \rightarrow y\prime \in x))$$

   Na temelju von Neumannove definicije prirodnoga broja, gdje je 0 prazan skup, a svaki sljedbenik prirodnoga broja definiran kao skup svih prethodnih prirodnih brojeva ($y\prime =_{def} y \cup \{y\}$), dobivamo beskonačan skup:

   $$\{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\} \ldots\}$$

8. Aksiomatska shema zamjene (Fraenkel / Skolem):

   $$\forall x (\forall y (y \in x \rightarrow \exists! z\, p(y, z)) \rightarrow \exists w\, w = \{z | \exists y\, y \in x \land p(y, z)\}))$$

   Ako je dan neki skup x i relacija p koja za svaki član skupa x određuje jedan jedinstveni predmet, onda opstoji i skup svih predmeta u relaciji p prema x.

9. Aksiom pravilnosti (utemeljenosti) – svaki neprazan skup ima barem jedan član s kojim ima prazan prijesjek (razdvojeni su).

   $$\forall x (x \neq \varnothing \rightarrow \exists y (y \in x \land x \cap y = \varnothing))$$

   Definicija. $\forall x (x \in y \cap z \leftrightarrow (x \in y \land x \in z))$

   Isključeni su svi skupovi kojima članovi nisu prethodno definirani, kao skup $\{\{\{\ldots\}\}\}$, koji je sam svoj član. – Svaki skup sadrži minimalni član u silaznome članstvenome nizu. Skupovi se stoga razlikuju prema stupnjevima: $\wp a$ je za jedan stupanj viši od skupa a

   Odtuda slijedi da *nijedan skup nije svoj član*. *Dokaz.* Neka $a \in a$. Tada ima i skup $\{a\}$. Međutim tada, suprotno aksiomu pravilnosti, $\{a\}$ i njegov jedini član a imaju neprazan prijesjek, naime, zajednički im je član predmet a.

10. Aksiom izbora (*AC*) – neka je a skup nepraznih skupova; tada ima funkcija f takva da

$$\forall x(x \in a \to f(x) \in x).$$

Taj se aksiom često osporava. Naime, u nekim slučajima član iz svakoga skupa možemo odrediti neovisno o aksiomu izbora, primjerice, u svakome nepraznome podskupu skupa prirodnih brojeva uvijek možemo izabrati najmanji član. S druge strane, nije pronađena funkcija koja će iz svakoga nepraznoga podskupa realnoga kontinuuma odrediti jedan član (primjerice, to ne može biti najmanji, najveći ili srednji član, jer oni ne postoje za svaki takav podskup).

Dodajmo da se hipoteza kontinuuma i poopćena hipoteza kontinuuma ne mogu u *ZFC* ni opovrći (Gödel, 1939.) ni dokazati (Cohen, 1963.).

Osim sustava *ZFC* poznat je, primjerice, i sustav *NBG* (John von Neumann, Paul Bernays i Kurt Gödel). Za taj je sustav karakteristično razlikovanje skupa (kao posebnoga slučaja razreda) i "pravoga razreda". Uvjet da x bude skup (S) određuje se ovako:

$$S\,x \leftrightarrow \exists y(x \in y)$$

Pravi su razredi "preveliki" da bi bili skupovi:

$$\neg S\,x \leftrightarrow |x| = |V|$$

gdje je V sveopći (univerzalni) skup.

7.5 Zadatci

1. Prevedite sljedeće rečenice na jezik logike višega reda, sami birajući osnovne simbole:

   (a) Različiti ljudi imaju barem neka svojstva različita.

   (b) Neka Markova svojstva nisu, a neka jesu pohvalna.

   (c) Nemaju svi ljudi sva dobra svojstva.

   (d) Marko ima neka svojstva koja su prihvatljivija od nekih Ivanovih svojstava.

   (e) Nema čovjeka bez ijednoga dobroga svojstva.

2. Preoblikujte sljedeće formule s λ-apstraktom u istovrijedne formule bez λ-apstrakta, i obratno, formule bez λ-apstrakta u istovrijedne formule s λ-apstraktom što većega dosega:

   (a) $(\lambda x.Px)(c) \vee Qc$,

   (b) $\forall x(\lambda y.(Py \to Qy))(x)$,

   (c) $Pcx \wedge \neg Pcd$,

   (d) $\forall x \exists y(\lambda z.(Pz \wedge \neg Qyz))(c)$,

   (e) $Pc \vee Qcx$.

3. Služeći se definiranim pojmovima beskonačnosti i izbrojivosti, kako biste definirali neprebrojivost?

4. Izrazite, redom, da ima 0, 1, 2 i 3 predmeta sa svojstvom X (neformalno ispuštajući oznake tipa).

5. Uočite da se mogu brojati uređene n-torke bilo kojega tipa (broj je, u tom smislu, svojstvo n-mjesne relacije). Navedite nekoliko konkretnih primjera višemjesnih relacija i njihova brojnoga stanja.

6. Objasnite na primjeru zašto logika višega reda s nepravim Henkinovim modelima nije pouzdana.

7. Provjerite istinitosnim stablom valjanost iskaza $\forall Y \exists X \forall x \neg(\lambda y.Yxy) = X$. Za X treba supstituirati $(\lambda y.\neg Pxy)$.

Dio III

ISKAZNA LOGIKA I LOGIKA PRVOGA REDA (SAŽETAK)

Poglavlje 8

Iskazna logika

8.1 Jezik $\mathscr{L}_i$ iskazne logike

8.1.1 Sintaksa (rječnik i gramatika)

Rječnik

1. Iskazna slova: $P, Q, R, P_1, \ldots,$
2. poveznici: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow,$
3. razgodci: (,).

Iskazna su slova opisni simboli, poveznici logički simboli, a razgodci pomoćni simboli .

Gramatika

DEFINICIJA 8.1 (IZRAZ) *Izraz je konačan niz osnovnih simbola jezika $\mathscr{L}_i$.*

Svaki simbol naveden u rječniku može u izrazu imati više *pojavaka*. Kao *metavarijable* za izraze rabimo mala slova: $p, q, r, p_1, ...$

DEFINICIJA 8.2 (ISKAZ) *Iskaz je najmanji skup izraza tvoren prema sljedećim pravilima:*

1. *Svako je iskazno slovo iskaz.*
2. *Ako je p iskaz, $\neg p$ je iskaz.*
3. *Ako su p i q iskazi, $(p \wedge q)$, $(p \vee q)$, $(p \rightarrow q)$ i $(p \leftrightarrow q)$ jesu iskazi.*

Iskazi tvoreni prema pravilu 1) jesu *jednostavni* (atomarni) iskazi. Jednostavne iskaze i zanijekane jednostavne iskaze nazivljemo zajednički *slovnim iskazima.* Iskazi prema pravilima 2) – 3) jesu *sastavljeni iskazi* (molekularni).

Prema pravilu 2), poveznik je $\neg$ *jednomjestan* (singularan, unaran), a ostali su poveznici *dvomjesni* (binarni).

Neformalno vrijedi sljedeći običaj o porabi jezika: $\mathscr{L}_i$:

a) *vanjske zagrade* mogu se ispustiti kadgod iskaz stoji sam za se, tj. kad nije dio drugoga iskaza,

b) umjesto okruglih zagrada mogu se rabiti *uglate zagrade*,

c) *konjunkcija* i *disjunkcija* mogu se *opetovati* bez novih zagrada.

DEFINICIJA 8.3 (PODISKAZ) *Podiskaz je dio iskaza koji je također iskaz.*

DEFINICIJA 8.4 (DOSEG POJAVKA POVEZNIKA) *Doseg pojavka poveznika u iskazu najkraći je podiskaz koji sadrži taj pojavak.*

Ako nema dvosmislenosti, kraće govorimo i o "dosegu poveznika".

DEFINICIJA 8.5 (GLAVNI POJAVAK POVEZNIKA) *Glavni pojavak poveznika u podiskazu p jest pojavak poveznika takav da je p doseg toga pojavka.*

Uobičajeno je kraće govoriti o "glavnome povezniku" umjesto o "glavnome pojavku poveznika".

DEFINICIJA 8.6 (NEPOSREDNI PODISKAZ) *Neposredan podiskaz definiramo na sljedeći način:*

1. *u iskazima oblika $\neg p$ neposredan je podiskaz p,*

2. *u iskazima oblika $(p \wedge q), (p \vee q), (p \rightarrow q), (p \leftrightarrow q)$ neposredni su podiskazi p i q.*

8.1.2 Semantika jezika $\mathscr{L}_i$

DEFINICIJA 8.7 (OSNOVNO TUMAČENJE, T_0) Osnovno tumačenje*, T_0, jest pridruživanje istinitosne vrijednosti "istina" (***i***) ili "neistina" (***n***) svakomu jednostavnomu iskazu jezika $\mathscr{L}_i$ (tj. T_0 skup svih iskaznih slova preslikava u skup $\{$**i, n**$\}$.*

Osnovno se tumačenje, T_0, pomoću pravilā vrjednovanja (definicija istine) *proširuje* u opću funkciju tumačenja (tumačenja svakoga iskaza), T.

DEFINICIJA 8.8 (ISTINA U TUMAČENJU T)

1. *Ako je p jednostavan iskaz,* $T(p) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T_0(p) = \mathbf{i}$,
2. $T(\neg p) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = \mathbf{n}$,
3. $T(p \wedge q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako i* $T(p) = \mathbf{i}$ *i* $T(q) = \mathbf{i}$,
4. $T(p \vee q) = \mathbf{i}$ *ako i samo* $T(p) = \mathbf{i}$ *ili* $T(q) = \mathbf{i}$ *ili oboje,*
5. $T(p \rightarrow q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = \mathbf{n}$ *ili* $T(q) = \mathbf{i}$,
6. $T(p \leftrightarrow q) = \mathbf{i}$ *ako i samo ako* $T(p) = T(q)$.

8.2 Očuvanje istine u iskaznoj logici

DEFINICIJA 8.9 (ZADOVOLJIVOST) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedno tumačenje za koje je svaki član skupa* Γ *istinit.*
(Drugi nazivci: semantička suvislost, semantička konsistentnost.)

Skup je iskaza Γ *nezadovoljiv* ako i samo ako nije zadovoljiv, tj. ako i samo ako ni za jedno tumačenje nisu svi članovi skupa Γ istiniti.

STAVAK 8.1 *Ako je skup iskaza* Δ *zadovoljiv, zadovoljiv je i svaki njegov podskup, a ako je* Δ *nezadovoljiv, nezadovoljiv je i svaki nadskup skupa* Δ.

Dokaz
(a) Prvi dio stavka slijedi iz toga što bilo koji skup Γ koji je podskup skupa Δ (kraće: $\Gamma \subseteq \Delta$), sadrži samo članove skupa Δ. Prema tome, ako su svi članovi skupa Δ istiniti za neko tumačenje T, istiniti su za T i svi članovi skupa Γ.
(b) Drugi dio stavka slijedi iz toga što su svi članovi skupa Δ kojemu je skup Σ njegov nadskup (kraće: $\Delta \subseteq \Sigma$), također članovi nadskupa Σ. Prema tome, ako ni za jedno tumačenje nisu svi članovi Δ istiniti, širenjem skupa Δ novim članovima u skup Σ, i dalje će onaj član skupa Δ koji je za tumačenje T bio neistinit, biti neistinit za T, sada i kao član skupa Σ. $\dashv$

NAPOMENA 8.1 *Zadovoljivost su i nezadovoljivost* pojedinačnoga iskaza *samo posebni slučaji zadovoljivosti skupa iskaza. Naime, kraće kažemo da je iskaz p zadovoljiv ili nezadovoljiv ovisno o tome je li jedinični skup* $\{p\}$ *(tj. skup koji za jedini član ima p) zadovoljiv ili nije.*

DEFINICIJA 8.10 (POSLJEDICA, $\Gamma \models p$) *Iskaz p jest posljedica skupa iskaza* Γ *ako i samo ako je p istinit za svako tumačenje za koje je svaki član skupa* Γ *istinit.*

Drukčije kažemo i da iskaz p *slijedi* iz skupa Γ, ili da skup iskaza Γ *implicira* (povlači) iskaz p. Tumačenje koje pokazuje da neki iskaz p nije posljedica skupa Γ ($\Gamma \not\models p$), jest *protuprimjer* posljedičnoga odnosa. To je, dakle tumačenje za koje je *svaki član skupa* Γ *istinit, a iskaz p neistinit*.

STAVAK 8.2 $\Gamma \models p$ *ako i samo ako je skup* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nezadovoljiv.*

Dokaz Stavak pomoću izraza 'ako i samo ako' tvrdi da (a) ako vrijedi lijeva strana vrijedi i desna, te (b) ako vrijedi desna da vrijedi i lijeva strana.
a) Neka $\Gamma \models p$ i neka su svi članovi Γ istiniti. Tada, prema definiciji slijeda (posljedice), i p mora biti istinit, a $\neg p$, prema tome, neistinit. Tada je, dakle, skup $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljiv.
b) Neka je skup $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nezadovoljiv i neka je svaki član skupa Γ istinit. Tada $\neg p$ mora biti neistinito, a p, prema tome, istinito. No, to znači, prema definiciji slijeda (posljedice), da $\Gamma \models p$. $\dashv$

STAVAK 8.3 *Ako* $\Gamma \models p$ *i* $\Gamma \models \neg p$, *onda je* Γ *nezadovoljiv.*

Dokaz Pretpostavimo da su svi iskazi koji su članovi skupa Γ istiniti za neko tumačnje T. Tada bi, prema definiciji posljedice, za T morali biti istinit i p i $\neg p$, što je nemoguće (jer $\neg$ mijenja istinitosnu vrijednost). Prema tome, ni za jedno tumačenje ne mogu svi članovi Γ biti istiniti. $\dashv$

STAVAK 8.4 *Neka* $\Delta \subseteq \Gamma$. *Ako* $\Delta \models p$, *onda* $\Gamma \models p$. *(Tj. posljedica skupa, posljedica je i nadskupa.)*

Dokaz Neka $\Delta \models p$. Neka su i svi članovi Δ istiniti. Tada je istinito i p. No, ako su istiniti svi članovi Γ, istiniti su i svi članovi podskupa Δ. A tada je istinito i p. dakle $\Gamma \models p$. $\dashv$

DEFINICIJA 8.11 (SEMANTIČKA VALJANOST ZAKLJUČKA) *Zaključak je semantički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak istinit za svako tumačenje za koje su sve premise istinite.*

Protuprimjer valjanu zaključku jest tumačenje za koje su sve premise istinite, a zaglavak neistinit.

DEFINICIJA 8.12 (SEMANTIČKA VALJANOST ISKAZA) *Iskaz je semantički valjan ako i samo ako je istinit za svako tumačenje.*
(Drugi nazivci: logički istinit iskaz ili tautologija.)

Valjani se i nezadovoljivi iskazi zajednički nazivlju i *logički određenim* iskazima. Iskaz koji nije ni valjan ni nezadovoljiv, jest *logički neodređen* (kontingentan) iskaz. On je zadovoljiv, ali nije valjan.

STAVAK 8.5 *Valjan je iskaz* posljedica bilo kojega skupa iskazâ*, odnosno, to je zaglavak koji slijedi iz bilo kojih premisa.*

Dokaz Kako je valjan iskaz istinit za svako tumačenje, istinit je i za svako tumačenje za koje su svi članovi bilo kojega skupa istiniti. ⊣

STAVAK 8.6 *Iskaz p je* valjan *ako i samo ako je p* posljedica praznoga *skupa iskaza.*

Dokaz
(a) Dokaz s lijeva na desno (ako vrijedi lijeva strana stavka, vrijedi i desna): Ako je p valjan, posljedica je svakoga skupa, kako je dokazano, pa prema tome i praznoga skupa.
(b) Dokaz s desna na lijevo (ako vrijedi desna strana stavka, vrijedi i lijeva). Ako $\varnothing \models p$, onda p mora uvijek biti istinito, jer su (na prazan način) i svi članovi $\varnothing$ istiniti ("svih" 0 članova skupa $\varnothing$ jesu istiniti). ⊣

Također, *posljedica* konačnoga skupa Γ svodi se na *valjanost pogodbe* u kojoj je prednjak konjunkcija članova skupa Γ, a posljedak je posljedica.

Kako smo već pokazali, *posljedični* odnos $\Gamma \models p$ može se svesti na *nezadovoljivost* unije $\Gamma \cup \{\neg p\}$. To znači da se i semantička *valjanost* zaključka svodi na nezadovoljivost skupa što ga čine *premise i nijek zaglavka*. A valjanost iskaza p svodi se, prema tome, na *nezadovoljivost* skupa $\{\neg p\}$. Te ćemo činjenice upotrijebiti pri primjeni metode istinitosnoga stabla.

DEFINICIJA 8.13 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST (EKVIVALENTNOST), $p \simeq q$) *Iskazi p i q jesu semantički istovrijedni ako i samo ako su za svako tumačenje oba istiniti ili oba neistiniti.*

STAVAK 8.7 (DE MORGANOVI ZAKONI)

$$\neg(p \wedge q) \simeq \neg p \vee \neg q,$$
$$\neg(p \vee q) \simeq \neg p \wedge \neg q.$$

Dokaz Gornje je zakone lako provjeriti istinitosnim tablicama, izgrađenima na temelju istinitosnih vrijednosti za p i q na lijevoj strani tablice. ⊣

8.3 Deduktivni sustav u iskaznoj logici

Prikazujemo Jaśkowski-Fitchov stil naravne dedukcije.[1]

DEFINICIJA 8.14 (DOKAZ) *Dokaz je konačan niz iskaza koji su pretpostavake ili su izvedeni prema deduktivnim pravilima.*

DEFINICIJA 8.15 (DOKAŽLJIVOST, $\vdash$) *Iskaz je p dokažljiv iz skupa iskaza* Γ *(kraće* $\Gamma \vdash p$*) ako i samo ako ima dokaz iskaza p iz konačnoga podskupa skupa* Γ.

STAVAK 8.8 *Ako je iz* Γ *dokažljiv iskaz p, a* Γ *je podskup skupa* Δ*, onda je i iz* Δ *dokažljivo p. (Tj. ako* $\Gamma \vdash p$ *i* $\Gamma \subseteq \Delta$*, onda* $\Delta \vdash p$*).*

Dokaz Neka $\Gamma \vdash p$ i $\Gamma \subseteq \Delta$. Kako su svi članovi skupa Γ također i članovi skupa Δ, jednak dokaz iskaza p je moguć i iz skupa Δ. Δ može sadržavati i druge pretpostavke koje, međutim, ne moramo upotrijebiti u dokazu iskaza p. $\dashv$

DEFINICIJA 8.16 (DOSTUPNOST RETKA U DOKAZU) *Redak m dostupan je u retku n ako i samo ako sve pretpostavke koje vrijede u retku m, vrijede i u retku n.*

DEFINICIJA 8.17 (DOSTUPNOST PODDOKAZA) *Poddokaz h-i dostupan je u retku n ako i samo ako sve pretpostavke pod kojima stoji cijeli poddokaz h-i (dakle isključujući one koje se nalaze unutar poddokaza), vrijede i u retku n.*

8.3.1 Deduktivna pravila u iskaznoj logici

Pravila se primjenjuju u mogućem širem kontekstu nekoga dokaza, kad već vrijede neke pretpostavke (skup iskaza Γ, može biti i prazan). U prikazu pravila rezultat je primjene pravila uokviren kvadratićem.

Pravilo **opetovanja**[2] kaže da ono što je dokažljivo iz skupa, dokažljivo je i iz nadskupa:

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & \boxed{p} & h \text{ op} \end{array}$$

[1]Za usporedan prikaz Suppes-Lemmonova stila usp. [9, str. 30 nadalje]. Opstoji i Gentzenov, razgranati stil naravne dedukcije (od G. Gentzena i potječe nazivak "naravno zaključivanje", 1934.). Povijesno je najranija naravna dedukcija ("metoda suppozicija") S. Jaśkowskoga (1926/27., 1934.), koju je poslije modificirao F. B. Fitch (1952).

[2]Usp. opis deduktivnoga sustava u [9].

Tj.

$\Gamma \vdash p$
dakle $\Gamma \cup \Delta \vdash p$, op

U nastavku ćemu u rezultatu primjene pravila umjesto $\Gamma \cup \Delta$ pisati jednostavno Γ!

Nadalje, lijevo prikazujemo pravilo **uvođenja konjunkcije** (u$\wedge$), a desno dva oblika pravila za **isključenje konjunkcije** (i$\wedge$):

h	p		h	$p \wedge q$		h	$p \wedge q$	
i	q		i	$\boxed{p}$	h i$\wedge$	i	$\boxed{q}$	h i$\wedge$
j	$\boxed{p \wedge q}$	h, i u$\wedge$						

Tj.:

$\Gamma \vdash p$
$\Gamma \vdash q$
dakle $\Gamma \vdash p \wedge q$, u$\wedge$

Skupovi iz kojih se dokazuju p i q, podskupovi su skupa Γ, iz kojega (ili iz nadskupa kojega) se dokazuje $p \wedge q$.

Ovako možemo izraziti pravilo i$\wedge$:

$\Gamma \vdash p \wedge q$
dakle $\Gamma \vdash p$, i$\wedge$

$\Gamma \vdash p \wedge q$
dakle $\Gamma \vdash q$, i$\wedge$

Prema **isključenju pogodbe** (*modus ponens*), iskaz q možemo izvesti ako nam je dostupno $p \to q$ i p:

h	$p \to q$	
i	p	
j	$\boxed{q}$	h, i i $\to$

A pravilo je **isključenja dvopogodbe** slično pravilu isključenja pogodbe, ali vrijedi u oba smjera:

h	$p \leftrightarrow q$			h	$p \leftrightarrow q$	
i	p		*ili* :	i	q	
j	$\boxed{q}$	h i $\leftrightarrow$		j	$\boxed{p}$	h i $\leftrightarrow$

Pravila i$\rightarrow$ i i$\leftrightarrow$ možemo na sljedeći način izraziti pomoću pojma dokažljivosti:

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash p \rightarrow q \\ \Gamma \vdash p \\ \text{dakle } \Gamma \vdash q, \ \text{i} \rightarrow \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash p \leftrightarrow q \\ \Gamma \vdash p \\ \text{dakle } \Gamma \vdash q, \ \text{i} \leftrightarrow \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma \vdash p \leftrightarrow q \\ \Gamma \vdash p \\ \text{dakle } \Gamma \vdash q, \ \text{i} \leftrightarrow \end{array}$$

Pravilo **uvođenja disjunkcije**:

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & \boxed{p \vee q} & h \ \text{u}\vee \end{array} \qquad \mathit{ili}: \qquad \begin{array}{r|ll} h & q & \\ i & \boxed{p \vee q} & h \ \text{u}\vee \end{array}$$

Izrazimo sada pravilo u$\vee$ pomoću pojma dokažljivosti:

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash p \\ \text{dakle } \Gamma \vdash p \vee q, \ \text{u}\vee \end{array} \qquad \begin{array}{l} \Gamma \vdash q \\ \text{dakle } \Gamma \vdash p \vee q, \ \text{u}\vee \end{array}$$

Neka se pravila služe poddokazom. To je, najprije, pravilo **uvođenja pogodbe**:

$$\begin{array}{r|ll} h & \quad \underline{\big| \ p} & \\ i & \quad \big| \ q & \\ j & \boxed{p \rightarrow q} & h\text{–}i \ \text{u} \rightarrow \end{array}$$

To pravilo sadrži ovaj poddokaz:

$$\begin{array}{r|l} h & \underline{p} \\ i & q \end{array}$$

Uvođenje dvopogodbe:

$$\begin{array}{r|ll} h & \quad \underline{\big| \ p} & \\ i & \quad \big| \ q & \\ & & \\ j & \quad \underline{\big| \ q} & \\ k & \quad \big| \ p & \\ l & \boxed{p \leftrightarrow q} & h\text{–}i, \ j\text{–}k \ \text{u} \leftrightarrow \end{array}$$

Pravila u$\rightarrow$ i u$\leftrightarrow$ izražujemo pomoću pojma dokažljivosti ovako:

$\Gamma \cup p \vdash q$
dakle $\Gamma \vdash p \rightarrow q$, u $\rightarrow$

$\Gamma \cup p \vdash q$
$\Gamma \cup q \vdash p$
dakle $\Gamma \vdash p \leftrightarrow q$, u $\leftrightarrow$

Pravilo **isključenja disjunkcije**:

$$\begin{array}{r|lll}
h & p \vee q & & \\
i & & \vert\underline{\ p\ } & \\
j & & \vert\ r & \\
 & & & \\
k & & \vert\underline{\ q\ } & \\
l & & \vert\ r & \\
m & \boxed{r} & & h, i\text{–}j, k\text{–}l\ \mathrm{i}\vee
\end{array}$$

Izraženo pomoću pojma dokažljivosti, pravilo isključenja disjunkcije kazuje sljedeće:

$\Gamma \vdash p \vee q$
$\Gamma \cup p \vdash r$
$\Gamma \cup q \vdash r$
dakle $\Gamma \vdash r$, i$\vee$

Poddokaz je i sastavni dio *neizravnoga* dokaza, tj. dokaza pomoću protuslovlja. Rabi se u pravilu **isključenja nijeka**:

$$\begin{array}{r|lll}
h & & \vert\underline{\ \neg p\ } & \\
i & & \vert\ q & \\
j & & \vert\ \neg q & \\
k & \boxed{p} & & h\text{–}j\ \mathrm{i}\neg
\end{array}$$

Formulirano izričito pomoću pojma dokažljivosti, pravilo za isključenje nijeka kaže sljedeće:

$\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash q$, $\Gamma \cup \{\neg p\} \vdash \neg q$
dakle $\Gamma \vdash p$, i$\neg$

Samo izvođenje dokaza olakšat će se i skratiti ako primijenimo i neka *izvedena pravila* za nijek.

Prema pravilu **uvođenja nijeka**, u¬,

$$\begin{array}{r|l}
h & \quad \underline{p} \\
i & \quad q \\
j & \quad \neg q \\
k & \boxed{\neg p} \quad h\text{–}j \ \mathrm{u}\neg
\end{array}$$

Daljnje skraćenje izvođenja predstavlja izvedeno pravilo **isključenja dvostrukoga nijeka**:

$$\begin{array}{r|l}
h & \neg\neg p \\
i & \boxed{p} \quad h \ \mathrm{i}\neg\neg
\end{array}$$

Još je jedno izvedeno pravilo pravilo **slaboga isključenja nijeka**:

$$\begin{array}{r|l}
h & q \\
i & \neg q \\
j & \boxed{p} \quad h, i \ \text{slabo i}\neg
\end{array}$$

Znak ⊥ za protuslovlje možemo upotrijebiti umjesto dvaju redaka koji zajedno čine protuslovlje, ili umjesto bilo kojega protuslovnoga iskaza. Formalno ga u dokazu uvodimo pravilom **uvođenja protuslovlja**:

$$\begin{array}{r|l}
h & p \\
i & \neg p \\
j & \boxed{\perp} \quad h, i \ \mathrm{u}\perp
\end{array}$$

Primjenu ovoga pravila nije potrebno opravdavati ako želimo samo naznačiti da smo dobili protuslovlje (v. dolje o dokazu nesuvislosti).

Isključenje protuslovlja pokrata je za slabo isključenje nijeka:

$$\begin{array}{r|l}
h & \perp \\
j & \boxed{p} \quad h, i \ \mathrm{i}\perp
\end{array}$$

8.3.2 Deduktivna svojstva u iskaznoj logici

Definicija 8.18 (Sintaktična valjanost zaključka) *Zaključak je sintaktički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak dokažljiv iz skupa koji se sastoji od premisa toga zaključka.*

Definicija 8.19 (poučak (teorem), $\vdash p$) *Iskaz p jest poučak ako i samo ako je p dokažljiv iz praznoga skupa iskaza.*

Stavak 8.9

$$\begin{array}{ll}
\vdash p \to (q \to p) & \\
\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) & \\
\vdash (\neg p \to \neg q) \to (q \to p) & \\
\vdash \neg p \to (p \to q) & \\
\vdash p \vee \neg p & \textit{zakon isključenoga srednjega} \\
\vdash \neg(p \wedge \neg p) & \textit{zakon neprotuslovlja} \\
\vdash \neg(p \to p) & \textit{zakon istovjetnosti} \\
\vdash (p \to q) \vee (q \to r) & \\
\vdash ((p \to q) \to p) \to p & \textit{Peirceov zakon}
\end{array}$$

Dokaz Svi se poučci, tj. njihovi opći oblici, dokazuju općim oblikom dokaza. Ovo je opći dokaz za $\vdash (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$:

$$\begin{array}{r|l l}
1 & \quad \underline{\mid\ p \to (q \to r)} & \\
2 & \quad \mid \quad \underline{\mid\ p \to q} & \\
3 & \quad \mid \quad \mid \quad \underline{\mid\ p} & \\
4 & \quad \mid \quad \mid \quad \mid\ q & 2, 3 \text{ i} \to \\
5 & \quad \mid \quad \mid \quad \mid\ q \to r & 1, 3 \text{ i} \to \\
6 & \quad \mid \quad \mid \quad \mid\ r & 4, 5 \text{ i} \to \\
7 & \quad \mid \quad \mid\ p \to r & 3\text{–}6 \text{ u} \to \\
8 & \quad \mid\ (p \to q) \to (p \to r) & 2\text{–}7 \text{ i} \to \\
9 & (p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)) & 1\text{–}8 \text{ u} \to \quad \dashv
\end{array}$$

Definicija 8.20 (Nesuvisao (nekonsistentan) skup, $\Gamma \vdash p, \neg p$) *Skup je iskaza Γ nesuvisao ako i samo ako je iz njega dokažljivo p i $\neg p$.*

Znakom $\perp$ bilježimo da je u dokazu nesuvislosti iz skupa pretpostavaka dobiveno protuslovlje, neki iskaz p i njegov nijek $\neg p$. Iskaz je **suvisao** ako i samo ako nije nesuvisao.

Stavak 8.10 *Ako skup Γ nesuvisao, iz Γ je dokažljiv bilo koji iskaz p.*

Dokaz Ako je Γ nesuvisao, tj. iz Γ je dokažljivo protuslovlje $q, \neg q$, onda se i u poddokazu pod pomoćnom pretpostavkom $\neg p$ može izvesti $q, \neg q$, te se zatim u glavnome dokazu prema pravilu i$\neg$ može dokazati p. Evo opće sheme takva dokaza:

Neka $\Gamma \vdash q, \Gamma \vdash \neg q$

$$
\begin{array}{|ll}
\underline{\Gamma} & \\
\begin{array}{|ll} \underline{\neg p} & \\ q & \text{jer } \Gamma \vdash q, \Gamma \vdash \neg q \\ \neg q & \text{jer } \Gamma \vdash q, \Gamma \vdash \neg q \end{array} & \\
p & \text{i}\neg
\end{array}
$$

Podrazumijevamo da je u dokaz unesen neki konačan podskup skupa Γ. $\dashv$

STAVAK 8.11 *Ako je skup* Γ *nesuvisao, nesuvisao je i svaki njegov nadskup.*

Dokaz Gornji stavak neposredno proizlazi iz stavka 8.8, prema kojem sve što je dokažljivo iz Γ, dokažljivo je i iz bio kojega njegova nadskupa Δ. $\dashv$

Vrijedi i sljedeći

STAVAK 8.12 $\Gamma \vdash p$ *ako i samo ako je* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nesuvislo.*

Dokaz Stavak dokazujemo dvjema općim **shemama dokaza**. Prema prvoj se na temelju $\Gamma \vdash p$ pokazuje da je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvisao, a prema drugoj se na temelju nesuvislosti $\Gamma \cup \{\neg p\}$ pokazuje da $\Gamma \vdash p$.

Neka $\Gamma \vdash p$

$$
\begin{array}{|ll}
\Gamma & \\
\underline{\neg p} & \\
p & \text{jer } \Gamma \vdash p \\
\neg p & \text{op} \\
\bot &
\end{array}
$$

Neka je $\Gamma \cup \{\neg p\}$ nesuvisao

$$
\begin{array}{|ll}
\underline{\Gamma} & \\
\begin{array}{|ll} \underline{\neg p} & \\ q & \text{jer je } \Gamma \cup \{\neg p\} \text{ nesuvisao} \\ \neg q & \text{jer je } \Gamma \cup \{\neg p\} \text{ nesuvisao} \end{array} & \\
p & \text{i}\neg
\end{array}
$$

Podrazumijevamo da je u dokaz unesen neki konačan podskup skupa Γ. $\dashv$

DEFINICIJA 8.21 (SINTAKTIČKA ISTOVRIJEDNOST, $p \dashv\vdash q$) *Iskazi p i q jesu sintaktički istovrijedni ako i samo ako je q dokažljivo iz $\{p\}$, a p dokažljivo iz $\{q\}$.*

Definiens kraće zabilježen glasi ovako: $\{p\} \vdash q$ i $\{q\} \vdash p$.

Stavak 8.13

$p \to q \dashv\vdash \neg p \lor q$	*zakon svođenja* $\to$
$p \leftrightarrow q \dashv\vdash (p \land q) \lor (\neg p \land \neg q)$	*zakon svođenja* $\leftrightarrow$
$\neg\neg p \dashv\vdash p$	*zakon svođenja dvostrukoga nijeka*
$p \land q \dashv\vdash q \land p$	*zakon izmjenitosti za* $\land$
$p \lor q \dashv\vdash q \lor p$	*zakon izmjenitosti za* $\lor$
$(p \land q) \land r \dashv\vdash p \land (q \land r)$	*zakon udruživosti za* $\land$
$(p \lor q) \lor r \dashv\vdash p \lor (q \lor r)$	*zakon udruživosti za* $\lor$
$p \land (q \lor r) \dashv\vdash (p \land q) \lor (p \land r)$	*zakon raspodjeljivosti* $\land$ *na* $\lor$
$p \lor (q \land r) \dashv\vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$	*zakon raspodjeljivosti* $\lor$ *na* $\land$
$\neg(p \land q) \dashv\vdash \neg p \lor \neg q$	*De Morganov zakon*
$\neg(p \lor q) \dashv\vdash \neg p \land \neg q$	*De Morganov zakon*
$p \land p \dashv\vdash p$	*zakon idempotentnosti*
$p \lor p \dashv\vdash p$	*zakon idempotentnosti*
$p \land (p \lor q) \dashv\vdash p$	*zakon apsorpcije*
$p \lor (p \land q) \dashv\vdash p$	*zakon apsorpcije*
$p \land (q \lor \neg q) \dashv\vdash p$	*zakon pokrate*
$p \lor (q \land \neg q) \dashv\vdash p$	*zakon pokrate*
$p \dashv\vdash (p \land q) \lor (p \land \neg q)$	*zakon razvoja*
$p \dashv\vdash (p \lor q) \land (p \lor \neg q)$	*zakon razvoja.*

Dokaz Svi su navedeni oblici istovrijednosti dokažljivi odgovarajućim općim oblikom dokaza. Evo npr. općega dokaza za $p \lor (q \land r) \dashv\vdash (p \lor q) \land (p \lor r)$:

1	$p \lor (q \land r)$	
2	$\quad p$	
3	$\quad p \lor q$	2 u$\lor$
4	$\quad p \lor r$	2 u$\lor$
5	$\quad (p \lor q) \land (p \lor r)$	3, 4 u$\land$
6	$\quad q \land r$	
7	$\quad q$	6 i$\land$
8	$\quad p \lor q$	7 u$\lor$
9	$\quad r$	6 i$\land$
10	$\quad p \lor r$	9 u$\lor$
11	$\quad (p \lor q) \land (p \lor r)$	8, 10 u$\land$
12	$(p \lor q) \land (p \lor r)$	1, 2–5, 6–11 u$\lor$

1	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$	
2	$p \vee q$	1 i$\wedge$
3	$\mid\ p$	
4	$\mid\ p \vee (q \wedge r)$	3 u$\vee$
5	$\mid\ q$	
6	$\mid\ p \vee r$	1 i$\wedge$
7	$\mid\ \mid\ p$	
8	$\mid\ \mid\ p \vee (q \wedge r)$	7 u$\vee$
9	$\mid\ \mid\ r$	
10	$\mid\ \mid\ q \wedge r$	5, 9 uy$\wedge$
11	$\mid\ \mid\ p \vee (q \wedge r)$	10 u$\vee$
12	$\mid\ p \vee (q \wedge r)$	6, 7–8, 9–11 i$\vee$
13	$p \vee (q \wedge r)$	2, 3–4, 5–12 i $\vee$ $\dashv$

Kanonski dokaz u iskaznoj logici Može se definirati i kanonski način dokazivanja: njime se dokazuje nesuvislost zadanoga skupa iskaza, a svi se članovi zadanoga skupa najprije pretvaraju u disjunktivni normalni oblik (disjunktivno povezane formule koje su konjunktivno povezani slovni iskazi).

Poglavlje 9

Logika prvoga reda

9.1 Jezik $\mathscr{L}_p$ logike prvoga reda

9.1.1 Sintaksa (rječnik i gramatika)

Rječnik

1. *Predmetne (individualne) konstante*: $c, d, e, c_1, \ldots$, (neformalno i druga mala latinična slova, osim p, q, r i x, y, z),
2. *predmetne (individualne) varijable*: $x, y, z, x_1, \ldots$
3. *priroci* (predikati): $P^1, Q^1, R^1, P_1^1, \ldots, P^2, \ldots$, (neformalno i druga velika latinična slova; gornji pokazatelj priroka označuje broj *praznih mjesta* koje prirok ima uza se),
4. *poveznici*: $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$
5. *količiteljni simboli*: $\forall$, $\exists$ (čitamo "za svaki", odnosno "barem za jedan")
6. *razgodci (interpunkcija)*: (,).

Opisni su simboli priroci i predmetne konstante, a *logički* su simboli, uz poveznike, količiteljni simboli i predmetne varijable. *Pomoćni* su simboli razgodci. Predmetne konstante i predmetne varijable zajednički nazivljemo *predmetnim simbolima*.

Gramatika

Izraz se definira analogno kao u iskaznoj logici, kao konačan niz osnovnih simbola jezika $\mathscr{L}_p$. Također razlikujemo *pojavke* izraza od samih izraza.

U metajeziku rabimo *metavarijable* p, q, r, p_1, ... za izraze jezika $\mathscr{L}_p$, $\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2, \ldots$ za priroke, $\mathrm{c}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \ldots$ za predmetne konstante, $\mathrm{t}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2, \ldots$ općenito za predmetne simbole, i $\mathrm{x}, \mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \ldots$ za predmetne varijable.

DEFINICIJA 9.1 (FORMULA) *Skup formula jest najmanji skup izraza izgrađenih prema sljedećim pravilima:*

1. *Ako je* P *prirok, a* $\mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{n}$ *predmetni simboli,* $\mathrm{Pt}_1 \ldots \mathrm{t}_\mathrm{n}$ *jest formula.*

2. *Ako je p formula,* $\neg p$ *je formula.*

3. *Ako su p i q formule,* $(p \land q)$, $(p \lor q)$, $(p \to q)$ *i* $(p \leftrightarrow q)$ *jesu formule.*

4. *Ako je p formula a* x *varijabla,* $\forall \mathrm{x} p$ *i* $\exists \mathrm{x} p$ *su formule.*

Formule oblika 1) jesu *jednostavne* (atomarne) *formule* (neformalno na priroku ispuštamo gornje pokazatelje mjesnosti, jer je mjesnost očita iz same formule). Jednostavne formule i zanijekane jednostavne formule nazivljemo *slovnim formulama*. Formule prema pravilima 2) i 3) jesu *sastavljene formule*. Formule oblika $\forall \mathrm{x} p$ jesu *opće* (i to jesne opće) formule. Formule oblika $\exists \mathrm{x} p$ jesu *opstojne* (i to jesne opstojne) formule. Posebno razlikujemo *jesne* od *niječnih općih* formula ($\forall \mathrm{x} p$ od $\neg \exists \mathrm{x} p$), kao i *jesne* od *niječne opstojnih* formula ($\exists \mathrm{x} p$ od $\neg \forall \mathrm{x} p$).

Izraz oblika $\forall \mathrm{x}$ ili $\exists \mathrm{x}$ jest *količitelj* (kvantifikator). Poveznike i količitelje zajednički nazivljemo *djelateljima* (operatorima).

Za jezik $\mathscr{L}_p$ (kao i za $\mathscr{L}_i$) vrijedi dogovor o neformalnom ispuštanju *vanjskih* okruglih zagrada, o neformalnoj uporabi *uglatih*, te o opetovanim konjunkcijama i disjunkcijama bez unutrašnjih zagrada.

DEFINICIJA 9.2 (PODFORMULA) *Podformula je dio formule koji je također formula.*

Cijelu formulu također smatramo vlastitim dijelom.

DEFINICIJA 9.3 (DOSEG POJAVKA DJELATELJA) *Doseg pojavka djelatelja jest najkraća podformula koja sadrži taj pojavak.*

DEFINICIJA 9.4 (GLAVNI POJAVAK DJELATELJA) *Glavni pojavak djelatelja u podformuli p jest onaj pojavak kojemu je p doseg.*

Uobičajeno, često govorimo o "glavnome djelatelju", umjesto o "glavnome pojavku djelatelja".

Definicija 9.5 (Neposredna podformula)

1. *U formulama oblika* $\neg p$*, neposredna je podformula* p*.*

2. *U formulama oblika* $(p \wedge q)$*,* $(p \vee q)$*,* $(p \rightarrow q)$ *i* $p \leftrightarrow q$*, neposredne su podformule* p *i* q*.*

3. *U formulama oblika* $\forall \mathrm{x} p$ *i* $\exists \mathrm{x} p$*, neposredna je podformula* p*.*

Definicija 9.6 (Vezan i slobodan pojavak varijable)

1. *Pojavak varijable x u formuli p jest* vezan *ako i samo ako se nalazi u dosegu količitelja za x. Vezan je onim pojavkom količitelja za x u dosegu kojega se nalazi i koji ima najkraći doseg.*

2. *Pojavak varijable x u formuli p jest* slobodan *ako i samo ako nije vezan.*

Definicija 9.7 (Iskaz) *Formula p jest iskaz ako i samo ako u p nema nijednoga slobodnoga pojavka varijabla.*

Iskaz još zovemo *zatvorenom* formulom. Ostale su formule *otvorene* .

Definicija 9.8 (Supstitucija) *Supstitucija* t' *za* t (t'/t) *jest preoblika formule* p *u formulu* $p(\mathrm{t}'/\mathrm{t})$*, pri čem:*

1. *zamijenjena oznaka* t *jest slobodna varijabla ili predmetna konstanta,*

2. *ako je zamijenjujuća oznaka* t' *varijabla, ona ostaje slobodnom kad se u formuli* p *supstituira za* t *(kraće rečeno:* t' *je slobodan za* t *u* p*).*

9.1.2 Semantika jezika $\mathscr{L}_p$

Definicija 9.9 (Model, $\mathfrak{M}$) *Model,* $\mathfrak{M}$*, jest uređen par* $\langle \mathrm{D}, \mathcal{T} \rangle$*, gdje je*

1. D *(predmetno područje) neprazan skup,*

2. $\mathcal{T}$ *(tumačenje prvoga reda) funkcija koja*

   (a) *svakoj predmetnoj konstanti pridružuju član predmetnoga područja* D*,*

   (b) *svakomu n-mjesnomu priroku pridružuje n-članu relaciju na* D.[1]

[1] *n*-člana je relacija skup uređenih *n*-toraka, tj. *n*-članih skupova.

Stoga značenje predmetne konstante c kao vrijednost funkcije tumačenja $\mathcal{T}$ označujemo s $\mathcal{T}(\mathrm{c})$, a značenje priroka P^n s $\mathcal{T}(\mathrm{P}^n)$.

DEFINICIJA 9.10 (VRJEDNOVANJE VARIJABLA) *Vrjednovanje varijabla, v, jest pridruživanje člana predmetnoga područja svakoj predmetnoj varijabli.*

Značenje predmetne varijable x kao vrijednost funkcije vrjednovanja varijabla v označujemo s $v(\mathrm{c})$.

DEFINICIJA 9.11 (INAČICA VRJEDNOVANJA VARIJABLA) *Inačica vrjednovanja varijabla* $v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]$ *jest vrjednovanje varijabla koje se od vrjednovanja varijabla v razlikuje najviše varijabli pridruživanjem člana* d *predmetnoga područja* x.

Općenito, značenje predmetne oznake t (bilo konstante, bilo varijable) u modelu $\mathfrak{M}$ (koji sadrži tumačenje $\mathcal{T}$) i za vrjednovanje varijabla v označujemo s $[\![t]\!]^{\mathfrak{M}}_v$.

DEFINICIJA 9.12 (ZADOVOLJENOST FORMULE)

1. $\mathfrak{M} \models_v \mathrm{Pt}_1, \ldots, \mathrm{t}_n$ *akko* $\langle [\![\mathrm{t}_1]\!]^{\mathfrak{M}}_v, \ldots, [\![\mathrm{t}_n]\!]^{\mathfrak{M}}_v \rangle \in \mathcal{T}(\mathrm{P}^n)$,
2. $\mathfrak{M} \models_v \neg p$ *akko* $\mathfrak{M} \not\models_v p$,
3. $\mathfrak{M} \models_v (p \wedge q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *i* $\mathfrak{M} \models_v q$,
4. $\mathfrak{M} \models_v (p \vee q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,
5. $\mathfrak{M} \models_v (p \rightarrow q)$ *akko* $\mathfrak{M} \not\models_v p$ *ili* $\mathfrak{M} \models_v q$,
6. $\mathfrak{M} \models_v (p \leftrightarrow q)$ *akko* $\mathfrak{M} \models_v p, q$ *ili* $\mathfrak{M} \not\models_v p, q$,
7. $\mathfrak{M} \models_v \forall \mathrm{x} p$ *akko za svaki* $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} p$,
8. $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} p$ *akko barem za jedan* $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_{v[\mathrm{d}/\mathrm{x}]} p$.

9.2 Očuvanje istine u logici prvoga reda

DEFINICIJA 9.13 (ZADOVOLJIVOST) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedan model u kojem je svaki član* Γ *istinit.*

Skup je iskaza Γ *nezadovoljiv* ako i samo ako nije zadovoljiv, tj. ako i samo ako ni za jedan model nisu svi članovi skupa Γ istiniti.

I u logici prvoga reda vrijedi stavak o zadovoljivosti skupova i nadskupova koji je potpuno analogan stavku 8.1 iskazne logike:

STAVAK 9.1 *Ako je skup iskaza* Δ *zadovoljiv, zadovoljiv je i svaki njegov podskup, a ako je* Δ *nezadovoljiv, nezadovoljiv je i svaki nadskup skupa* Δ.

Dokaz Dokaz je sasvim analogan dokazu stavka 8.1 iskazne logike. ⊣

DEFINICIJA 9.14 (POSLJEDICA) *Iskaz p jest posljedica skupa iskaza* Γ *ako i samo ako je p istinit u svakome modelu za koji je svaki član skupa* Γ *istinit.*

Model u kojem je svaki član skupa Γ istinit, a iskaz p neistinit jest *protuprimjer*, koji pokazuje da p nije posljedica skupa Γ ($\Gamma \not\models p$).

DEFINICIJA 9.15 (SEMANTIČKA VALJANOST ZAKLJUČKA) *Zaključak je semantički valjan ako i samo ako je njegov zaglavak istinit u svakome modelu u kojem su sve premise istinite.*

DEFINICIJA 9.16 (SEMANTIČKA VALJANOST ISKAZA) *Iskaz je semantički valjan ako i samo ako je istinit u svakome modelu.*

Sljedeći su stavci potpuno analogni stavcima 8.2–8.6 iskazne logike i dokazuju se na sličan način.

STAVAK 9.2 $\Gamma \models p$ *ako i samo ako je skup* $\Gamma \cup \{\neg p\}$ *nezadovoljiv.*

STAVAK 9.3 *Ako* $\Gamma \models p$ *i* $\Gamma \models \neg p$, *onda je* Γ *nezadovoljiv.*

STAVAK 9.4 *Valjan je iskaz posljedica bilo kojega skupa iskazā.*

STAVAK 9.5 *Iskaz p jest valjan ako i samo ako je p posljedica praznoga skupa iskaza.*

DEFINICIJA 9.17 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST, $p \simeq q$) *Iskazi p i q jesu semantički istovrijedni ako i samo ako p i q u svakome modelu imaju istu istinitosnu vrijednost.*

Zadovoljivost, posljedični odnos i istovrijednost formula

DEFINICIJA 9.18 (ZADOVOLJIVOST SKUPA FORMULA) *Skup je iskaza* Γ *zadovoljiv ako i samo ako ima barem jedan model* $\mathfrak{M}$ *i vrjednovanje varijabla v takvi da za svaku formulu* $p \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models_v p$.

DEFINICIJA 9.19 (NEZADOVOLJIVOST SKUPA FORMULA) *Skup je formula* Γ *nezadovoljiv ako i samo ako* Γ *nije zadovoljiv.*

DEFINICIJA 9.20 (POSLJEDICA, $\models$) *$\Gamma \models p$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v p$ kadgod za svaku formulu $q \in \Gamma$, $\mathfrak{M} \models_v q$.*

DEFINICIJA 9.21 (VALJANOST FORMULE) *Formula je valjana ako i samo ako u svakome modelu $\mathfrak{M}$ i za svako vrjednovanje varijabla v, $\mathfrak{M} \models_v p$.*

DEFINICIJA 9.22 (SEMANTIČKA ISTOVRIJEDNOST FORMULA, $p \simeq q$) *$p \simeq q$ ako i samo ako za svaki model $\mathfrak{M}$ i za svako vrjednovanje varijabla v, $\mathfrak{M} \models_v p$ ako i samo ako $\mathfrak{M} \models_v q$.*

STAVAK 9.6 (DE MORGANOVI ZAKONI ZA KOLIČITELJE)

$$\neg\forall \mathrm{x} p \simeq \exists \mathrm{x} \neg p$$
$$\neg\exists \mathrm{x} p \simeq \forall \mathrm{x} \neg p,$$

Dokaz Ako nije svakim predmetom zadovoljena formula p, onda je barem jednim predmetom zadovoljena formula $\neg p$. I obratno, ako ne opstoji predmet kojim je zadovoljena formula p, onda je svakim predmetom zadovoljena formula $\neg p$. Evo i formalnoga dokaza. Prva istovrijednost:

$\mathfrak{M} = \langle \mathrm{D}, \mathscr{T} \rangle \models_v \neg\forall \mathrm{x} p$	
akko $\mathfrak{M} \not\models \forall \mathrm{x} p$,	zadovoljenost nijeka
akko, barem za jedan $\mathrm{d} \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \not\models_v [\mathrm{d}/\mathrm{x}]p$,	zadovoljenost opće formule,
akko, barem za jedan $d \in \mathrm{D}, \mathfrak{M} \models_v [\mathrm{d}/\mathrm{x}]\neg p$,	zadovoljenost nijeka,
akko $\mathfrak{M} \models_v \exists \mathrm{x} \neg p$,	zadovoljenost opstojne formule.

Za vježbu, dokažite i drugu istrovrijednost! $\dashv$

9.3 Deduktivni sustav u logici prvoga reda

Analogno iskaznoj logici, i u logici prvoga reda

> **dokaz** je niz iskaza (formula) od kojih je svaki pretpostavka ili je izveden prema dokaznome pravilu,

i

> p je **dokažljivo** iz skupa Γ ($\Gamma \vdash p$) ako i samo ako ima dokaz iskaza (formule) p iz podskupa skupa Γ.

Vrijede i potpuno analogne definicije dostupnosti retka i poddokaza kao u iskaznoj logici.

9.3.1 Dokazna pravila u logici prvoga reda

Uz pravila koja vrijede za deduktivni sustav iskazne logike, dodajemo i četiri pravila za količitelje.

Pravilo **isključenje općega količitelja**:

$$\begin{array}{r|l} h & \forall \mathrm{x} p \\ i & \boxed{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})} \quad h\ \mathrm{i}\forall \end{array}$$

tj., opisano pomoću izričitoga pojma dokažljivosti:

$\Gamma \vdash \forall \mathrm{x} p$,
dakle $\Gamma \vdash p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$, i$\forall$

Pravilo **uvođenja općega količitelja**:

$$\begin{array}{r|l} h & p \\ i & \boxed{\forall \mathrm{x} p(\mathrm{x}/\mathrm{c})} \quad h\ \mathrm{u}\forall \end{array}$$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama

tj.,

$\Gamma \vdash p$,
dakle $\Gamma \vdash \forall \mathrm{x} p(\mathrm{x}/\mathrm{c})$, i$\forall$
c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama

Pravilo **uvođenja opstojnoga količitelja**:

$$\begin{array}{r|l} h & p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \\ i & \boxed{\exists \mathrm{x} p} \quad h\ \mathrm{u}\exists \end{array}$$

tj.,

$\Gamma \vdash p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$,
dakle $\Gamma \vdash \exists \mathrm{x} p$

Pravilo **isključenje opstojnoga količitelja**:

h	$\exists \mathrm{x} p$
i	$\quad p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$
j	$\quad q$
k	$\boxed{q}$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama, $\exists$x p, ni u q

tj.,

$\Gamma \vdash \exists \mathrm{x} p$
$\Gamma \cup \{p(\mathrm{c}/\mathrm{x})\} \vdash q$
dakle $\Gamma \vdash q$
c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama, $\exists$x p, ni u q

9.3.2 Deduktivna svojstva u logici prvoga reda

Odredbe sintaktične valjanosti i poučka za logiku prvoga reda možemo analogijski preuzeti iz iskazne logike, imajući na umu da se sada kao iskazi javljaju svi iskazi jezika $\mathscr{L}_p$ i da rabimo sva izvodna pravila deduktivnoga sustava logike prvoga reda.

STAVAK 9.7 (POUČCI)

$\vdash \forall \mathrm{x} p \to \exists \mathrm{x} p$
$\vdash \forall \mathrm{x} \forall \mathrm{y} p \to \forall \mathrm{y} \forall \mathrm{x} p$
$\vdash \exists \mathrm{x} \exists \mathrm{y} p \to \exists \mathrm{y} \exists \mathrm{x} p$
$\vdash \exists \mathrm{x} \forall \mathrm{y} p \to \forall \mathrm{y} \exists \mathrm{x} p$
$\vdash (\forall \mathrm{x} p \lor \forall \mathrm{x} q) \to \forall \mathrm{x}(p \lor q)$
$\vdash \exists \mathrm{x}(p \land q) \to (\exists \mathrm{x} p \land \exists \mathrm{x} q)$
$\vdash \forall \mathrm{x}(p \to q) \to (\forall \mathrm{x} p \to \forall \mathrm{x} q)$
$\vdash \exists \mathrm{x}(p \to q) \to (\forall \mathrm{x} p \to \exists \mathrm{x} q)$
$\vdash (\exists \mathrm{x} p \to \forall \mathrm{x} q) \to \forall \mathrm{x}(p \to q)$

Vrijede i sintaktične istovrijednosti iz iskazne logike, stavak 8.9, s poopćenjem p, q i r tako da se te metavarijable odnose na formule logike prvoga reda.

Dokaz Svi se oblici poučaka iz stavka 9.7 dokazuju općim oblicima dokaza. Npr.

1	$\exists \mathrm{x} p \to \forall \mathrm{x} q$	
2	$p(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	
3	$\exists \mathrm{x} p$	2 u$\exists$
4	$\forall \mathrm{x} q$	1, 3 i $\to$
5	$q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	4 i$\forall$
6	$p(\mathrm{c}/\mathrm{x}) \to q(\mathrm{c}/\mathrm{x})$	2–5 u $\to$
7	$\forall \mathrm{x}(p \to q)$	6 u$\forall$
8	$(\exists \mathrm{x} p \to \forall \mathrm{x} q) \to \forall \mathrm{x}(p \to q)$	1–7 u $\to$ ⊣

STAVAK 9.8

$\neg\forall \mathrm{x} p \dashv\vdash \exists \mathrm{x} \neg p$	*De Morganov zakon za* $\forall$ *i* $\exists$
$\neg\exists \mathrm{x} p \dashv\vdash \forall \mathrm{x} \neg p$	*De Morganov zakon za* $\forall$ *i* $\exists$
$p \dashv\vdash \forall \mathrm{x} p$, *p ne sadrži slobodan x*	*prazno pokoličavanje*
$p \dashv\vdash \exists \mathrm{x} p$, *p ne sadrži slobodan x*	*prazno pokoličavanje*
$\forall \mathrm{x}(p \wedge q) \dashv\vdash \forall \mathrm{x} p \wedge \forall \mathrm{x} q$	*zakon raspodjeljivosti* $\forall$ *na* $\wedge$
$\exists \mathrm{x}(p \vee q) \dashv\vdash \exists \mathrm{x} p \vee \exists \mathrm{x} q$	*zakon raspodjeljivosti* $\exists$ *na* $\vee$
$\forall \mathrm{x} p \dashv\vdash \forall \mathrm{x}' p(\mathrm{x}'/\mathrm{x})$, *p ne sadrži slobodan* x′	*preimenovanje x*
$\exists \mathrm{x} p \dashv\vdash \exists \mathrm{x}' p(\mathrm{x}'/\mathrm{x})$, *p ne sadrži slobodan* x′	*preimenovanje x*
$\forall \mathrm{x} p \wedge q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \wedge q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\wedge$
$\forall \mathrm{x} p \vee q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \vee q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\vee$
$\exists \mathrm{x} p \wedge q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \wedge q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\wedge$
$\exists \mathrm{x} p \vee q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \vee q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\vee$
$\forall \mathrm{x} p \to q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \to q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*promjena količitelja*
$\exists \mathrm{x} p \to q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \to q)$, *q ne sadrži slobodan* x	*promjena količitelja*
$p \to \forall \mathrm{x} q \dashv\vdash \forall \mathrm{x}(p \to q)$, *p ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\forall$ *preko* $\to$
$p \to \exists \mathrm{x} q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \to q)$, *p ne sadrži slobodan* x	*pomicanje* $\exists$ *preko* $\to$

Vrijede i sintaktične istovrijednosti iz iskazne logike, stavak 8.13, poopćene na logiku prvoga reda.

Dokaz Sve se istovrijednosti navedene u stavku 9.8 dokazuju općim oblicima dokaza na formulama. Dokažimo, primjerice, istovrijednost $p \to \exists \mathrm{x} q \dashv\vdash \exists \mathrm{x}(p \to$

q) s lijeva na desno!

1	$p \to \exists \mathrm{x} q(\mathrm{x})$	p ne sadrži slobodan x
2	$\neg \exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	
3	p	
4	$\exists \mathrm{x} q(\mathrm{x})$	$1, 3$ i $\to$
5	$q(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$	
6	$\neg q(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$	
7	p	
8	$q(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$	5 op
9	$p \to q(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$	7–8 u $\to$
10	$\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	9 u$\exists$
11	$\neg \exists \mathrm{x}(p(\mathrm{x}) \to q)$	2 op
12	$q(\mathrm{c}_1/\mathrm{x}))$	6–11 i$\neg$
13	$q(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$	$4, 5$–12 i$\exists$
14	$p \to q(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$	3–13 u $\to$
15	$\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	14 u$\exists$
16	$\neg \exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	2 op
17	$\exists \mathrm{x}(p \to q(\mathrm{x}))$	2 – 16 i$\neg$ $\dashv$

Kanonski dokaz Može se definirati i poseban, *kanonski* način gradnje dokaza. Kao i u iskaznoj logici, kanonski je dokaz uvijek dokaz nesuvislosti. Zadane se formule pretvaraju u *preneksni normalni oblik* – svi količitelji stoje na početku formule, a ostatak je formule (matrica) u njihovu dosegu; matrica se pretvara u disjunktivni normalni oblik.

9.4 Funkcije

Logici prvoga reda možemo dodati, bez stvarnoga proširenja logike, funkcije (funkcijske simbole, pripadnu semantiku i deduktivna pravila).

Funkcijski simboli: $f^1, g^1, h^1, \ldots, f^1_1, \ldots, f^2, \ldots,$

DEFINICIJA 9.23 (PREDMETNA OZNAKA)

1. *svaka je predmetna konstanta predmetna oznaka,*
2. *svaka je predmetna varijabla predmetna oznaka,*
3. *ako je f^n $n-$mjesni funkcijski simbol a $t_1, \ldots t_n$ predmetne oznake, $f(t_1, \ldots, t_n)$ je predmetna oznaka.*

DEFINICIJA 9.24 (OTVORENA I ZATVORENA PREDMETNA OZNAKA)

1. *Predmetna je oznaka* otvorena *ako i samo ako sadrži pojavak varijable.*
2. *Predmetna je oznaka* zatvorena *ako i samo ako nije otvorena.*

Tumačenje prvoga reda redefiniramo dodajući i novi slučaj da

> tumačenje prvoga reda svakomu funkcijskomu simbolu f pridružuje funkciju **f**: $D^n \to D$.

Deduktivni sustav Navodimo pravila za količitelje:

$$\begin{array}{r|ll} h & \forall x p & \\ i & \boxed{p(t/x)} & h\ i\forall \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka

$$\begin{array}{r|ll} h & p & \\ i & \boxed{\forall x p(x/c)} & h\ u\forall \end{array}$$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama

$$\begin{array}{r|ll} h & p(t/x) & \\ i & \boxed{\exists x p} & h\ u\exists \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka,

$$\begin{array}{r|lll} h & \exists x p & & \\ i & & \underline{p(c/x)} & \\ j & & q & h\ i\forall \\ k & \boxed{q} & & h, i\text{–}j\ i\exists \end{array}$$

c se ne javlja u vrijedećim pretpostavkama, $\exists x p$ ili q

9.5 Istovjetnost

Rječnik $\mathscr{L}_p$ proširujemo novim logičkim simbolom – dvomjesnim prirokom $=^2$. Novi je oblik jednostavnih formula: $t_1 = t_2$.

U svakom *tumačenju* prvoga reda vrijednost priroka $=^2$ jest skup svih uređenih parova $\langle d, d\rangle$ za svaki član d predmetnoga područja D. *Zadovoljenost* istovjetnosne formule definira se ovako:

$$\mathfrak{M} \models_v t_1 = t_2 \text{ ako i samo ako } [\![t_1]\!]_v^{\mathfrak{M}} = [\![t_2]\!]_v^{\mathfrak{M}}.$$

Deduktivni sustav Na deduktivna pravila pravila logike prvoga reda dodajemo **uvođenje istovjetnosti**:

$$\boxed{\begin{array}{r|ll} h & \boxed{c = c} & u\ = \end{array}}$$

tj.

$\varnothing \vdash \mathrm{c} = \mathrm{c}$

i **isključenje istovjetnosti**:

$$\begin{array}{r|l l r|l l} h & \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 & & h & \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 & \\ i & p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x}) & & i & p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x}) & \\ j & \boxed{p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})} & h, i \text{ i} = & j & \boxed{p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})} & h, i \text{ i} = \end{array}$$

tj.

$\Gamma \vdash \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2$	$\Gamma \vdash \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2$
$\Gamma \vdash p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$	$\Gamma \vdash p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$
dakle $\Gamma \vdash p(\mathrm{c}_2/\mathrm{x})$	dakle $\Gamma \vdash p(\mathrm{c}_1/\mathrm{x})$

Istovjetnost i funkcije Deduktivna pravila za istovjetnost, kao i u istinitosnome stablu, poopćavamo tako da vrijede i za zatvorene složene predmetne oznake:

$$\begin{array}{r|ll} h & \boxed{\mathrm{t} = \mathrm{t}} & u \ = \end{array}$$

t je zatvorena predmetna oznaka

$$\begin{array}{r|l l r|l l} h & \mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2 & & h & \mathrm{t}_1 = \mathrm{t}_2 & \\ i & p(\mathrm{t}_1/\mathrm{x}) & & i & p(\mathrm{t}_2/\mathrm{x}) & \\ j & \boxed{p(\mathrm{t}_2/\mathrm{x})} & h, i \text{ i} = & j & \boxed{p(\mathrm{t}_1/\mathrm{x})} & h, i \text{ i} = \end{array}$$

t_1 i t_2 su zatvorene predmetne oznake $\quad$ t_1 i t_2 su zatvorene predmetne oznake

Nazivlje i simboli

Usp. sličan popis nazivlja i simbola u [9].

Nazivlje

Donosimo neke nazivke u kojima najčešće nastaju razlike u literaturi na hrvatskome:

djelatelj – operator
dvopogodba – (materijalni) bikondicional, materijalna ekvivalencija
istovrijednost – ekvivalencija
jednostavna (formula) – atomarna (formula)
količitelj (opći, opstojni) – kvantifikator (univerzalni, egzistencijalni)
nijek – negacija
opetovanje – (re)iteracija
pogodba – (materijalni) kondicional, materijalna implikacija
posljedak – konsekvent
poučak – teorem
pouzdanost – utemeljenost (*soundness*)
poveznik – veznik
prirok – predikat
(predmetna) oznaka – term
prednjak – antecedent
sastavljena formula/iskaz – molekularna formula/iskaz
slovna formula/iskaz – literal
suvislost – konzistentnost
tumačenje – interpretacija
zadovoljiv – ispunjiv
zaglavak – konkluzija

Simboli

Simboli logičkih jezika:

$P, Q, R, \ldots, P_1, \ldots$ – iskazna slova
$P^1, Q^1, R^1, \ldots, P^2, \ldots, P^3, \ldots, P^1_1, \ldots,$ – priroci (priročna slova)
$=$ – znak istovjetnosti
$c, d, e, a_1, \ldots$ – predmetne konstante
$x, y, z, x_1, \ldots$ – predmetne varijable
$\neg,\ \wedge,\ \vee,\ \rightarrow,\ \leftrightarrow,\ \forall,\ \exists$ – djelateljni simboli
$(,)$ – zagrade

Usp. str. 97, 111 i 121.
$0, ', +, \times$ – posebni simboli u aritmetičkoj logici prvoga reda
$c^\tau, d^\tau, e^\tau, c^\tau_1, \ldots$ – konstante u logici višega reda
$x^\tau, y^\tau, z^\tau, x^\tau_1, \ldots$ – varijable u logici višega reda
$\mathcal{P}^\tau, \mathcal{Q}^\tau, \mathcal{R}^\tau, \mathcal{P}^\tau_1, \ldots$ – konstante trećega reda, neformalno
$\mathcal{X}^\tau, \mathcal{Y}^\tau, \mathcal{Z}^\tau, \mathcal{X}^\tau_1, \ldots$ – varijable trećega reda, neformalno
λ – priročni apstraktor (iz priroka tvori predmetnu oznaku)

Usp. str. 59 i str. 78 i dalje.

Metajezični simboli:

p, q, r – metavarijable za formule
$\mathrm{c}, \mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2$ – metavarijable za predmetne konstante
x, y, z – metavarijable za predmetne varijable
$\mathrm{t}, \mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2$ – metavarijable za predmetne oznake
$\mathrm{P}, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ – metavarijable za priroke i iskazna slova
V_0 – osnovno vrjednovanje u iskaznoj logici

$\mathfrak{M}$ – model
D – domena (predmetno područje)
$\mathrm{d}, \mathrm{d}_1, \mathrm{d}_2, \mathrm{d}_3$ – članovi domene D
$[\![t]\!]^{\mathfrak{M}}_v$ – ono što oznaka t označuje u modelu $\mathfrak{M}$ i vrjednovanju v
$\mathcal{T}$ – tumačenje
v – vrjednovanje varijabla
$\models$ – zadovoljenost; semantički slijed
$\vdash$ – dokažljivost (sintaktički slijed)

Izrazi iz teorije skupova:

$\{x \mid p\}$ skup svih predmeta x takvih da vrijedi p
$x \in y$ x je član skupa y
$\{x, y\}$ skup kojega su članovi upravo x i y, $\{z \mid z = x \lor z = y\}$
$\varnothing$ prazan skup, $\{x \mid x \neq x\}$
$x \cap y$ presjek skupova x i y, $\{z \mid z \in x \land z \in y\}$
$x \cup y$ unija skupova x i y, $\{z \mid z \in x \lor z \in y\}$
$\bigcap_i x_i$ presjek svih skupova x_i (i je pokazatelj), $\{z \mid \forall i\, z \in x_i\}$
$\bigcup_i x_i$ unija svih skupova x_i (i je pokazatelj), $\{z \mid \exists i\, z \in x_i\}$
$x - y$ razlika skupova x i y, $\{z \mid z \in x \land z \notin y\}$
$\wp x$ partitivni skup skupa x, $\{y \mid y \subseteq x\}$
$x \subseteq y$ x je podskup skupa y, $\forall z(z \in x \to z \in y)$
$x \subset y$ x je pravi podskup skupa y, $x \subseteq y \land \exists z(z \notin x \land z \in y)$
$\langle x_1, \ldots, x_n \rangle$ uređen skup (bitan je poredak članova) u kojem je prvi član $x_1, \ldots,$ a n-ti član x_n
$x_1 \times \ldots \times x_n$ umnožak skupova $x_1, \ldots, x_n$, $\{\langle z_1, \ldots, z_n \rangle \mid z_1 \in x_1 \land \ldots \land z_n \in x_n\}$

Varijable x, y i z (s pokazateljem ili bez njega) vrijede za bilo koji skup ili član skupa. U metateorijskoj primjeni govorimo pak, primjerice, o tome da je neka formula član nekoga skupa formula, $p \in \Gamma$, ili da je neki predmet član domene modela (ili nekoga drugoga skupa predmeta), $\mathrm{d} \in \mathrm{D}$.

Znak $\dashv$ na kraju odlomka označuje kraj dokaza.

Literatura

[1] Bergmann, M., Moor, J., Nelson, J. *The Logic Book*, 3. izd. New York etc.: McGraw-Hill, 2003.

[2] Boolos, G., Burgess, J. P., Jeffrey, R. *Computability and Logic*, 4. izd. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2002.

[3] Bostock, D. *Intermediate Logic*. Oxford: Clarendon, 1997.

[4] Chang, C. C., Keisler, H. J. *Model Theory*. Amsterdam etc.: Elsevier, 1990.

[5] Ćirović, B. *Uvod u matematičku logiku i teoriju rekurzivnih funkcija*. Zagreb: Filozofsko-teološki institut Družbe Isusove, 1996.

[6] Fitting, M. *Types, Tableaus and Gödel's God*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer, 2002.

[7] Kleene, S. C. *Introduction to Metamathematics*. Amsterdam, etc.: North-Holland, 1952.

[8] Kovač, S. Uvod u logiku. `https://moodle.carnet.hr/course/view.php?id=1305`, 2012.

[9] Kovač, S., Žarnić, B. *Logička pitanja i postupci*. Zagreb: KruZak, 2008.

[10] Manzano, M. *Extensions of First Order Logic*. Cambridge: Cambridge University Press, 1996.

[11] Mates, B. *Elementary Logic*, 2. izd. New York: Oxford University Press, 1972.

[12] Nagel, E., Newman, J. R. *Gödelov dokaz*. Zagreb: Kruzak, 2001. Prev. M. Hudoletnjak Grgić. Dodatak: K. Gödel, *O formalno neodlučivim stavcima Principia Mathematica i srodnih sustava I*, prev. V. Kirin.

[13] PAPIĆ, P. *Uvod u teoriju skupova*. Zagreb: Hrvatsko matematičko društvo, 2000.

[14] RIVENC, F. *Introduction à la logique*. Paris: Payot, 1989.

[15] SHAPIRO, S. *Foundations without Foundationalism : A Case for Second-order Logic*. New York, etc.: Oxford University Press, 2001.

[16] ŠIKIĆ, Z. *Logika*. Zagreb: Sveučilište u Zagrebu `http://www.fsb.unizg.hr/matematika/download/ZS/logika-knjiga/sikic_logika.pdf`, 2009.

[17] VUKOVIĆ, M. *Matematička logika*. Zagreb: Element, 2009.

ISBN 978-953-7823-34-4